TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 01 abr 2011
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________

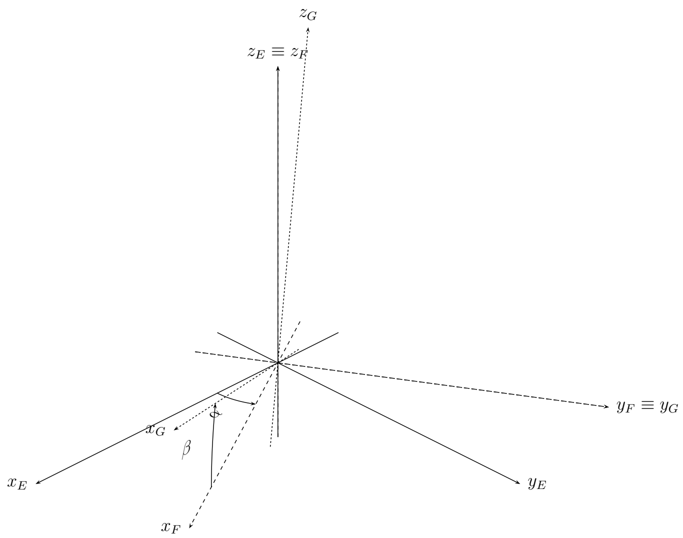
1 [20] A figura ao lado mostra duas rotações sucessivas, entre $(x_E, y_E, z_E) \to (x_F, y_F, z_F)$, e $(x_F, y_F, z_F) \to (x_G, y_G, z_G)$. As bases de cada sistema coordenado são, respectivamente, $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$; $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$; e $(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3)$. As matrizes de rotação $[\boldsymbol{C}]$ e $[\boldsymbol{D}]$ são definidas respectivamente por

$$\boldsymbol{f}_j \equiv C_{ij}\boldsymbol{e}_i; \qquad \boldsymbol{g}_k \equiv D_{jk}\boldsymbol{f}_j,$$

com

$$C_{ij} = (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{f}_j); \qquad D_{jk} = (\boldsymbol{f}_j \cdot \boldsymbol{g}_k).$$

A primeira rotação é um giro positivo de α radianos em torno de z_E, e a segunda rotação é um giro *negativo* de β radianos em torno de y_F. Obtenha as matrizes de rotação $[\boldsymbol{C}]$ e $[\boldsymbol{D}]$.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Na base E,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= [1,0,0]^\intercal, & \boldsymbol{f}_1 &= [\cos\alpha, +\operatorname{sen}\alpha, 0]^\intercal,\\ \boldsymbol{e}_2 &= [0,1,0]^\intercal, & \boldsymbol{f}_2 &= [-\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha, 0]^\intercal,\\ \boldsymbol{e}_3 &= [0,0,1]^\intercal, & \boldsymbol{f}_3 &= [0,0,1]^\intercal. \end{aligned}$$

Segue-se que

$$[\boldsymbol{C}] = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{f}_1) & (\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{f}_2) & (\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{f}_3)\\ (\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{f}_1) & (\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{f}_2) & (\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{f}_3)\\ (\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{f}_1) & (\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{f}_2) & (\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{f}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Na base F,

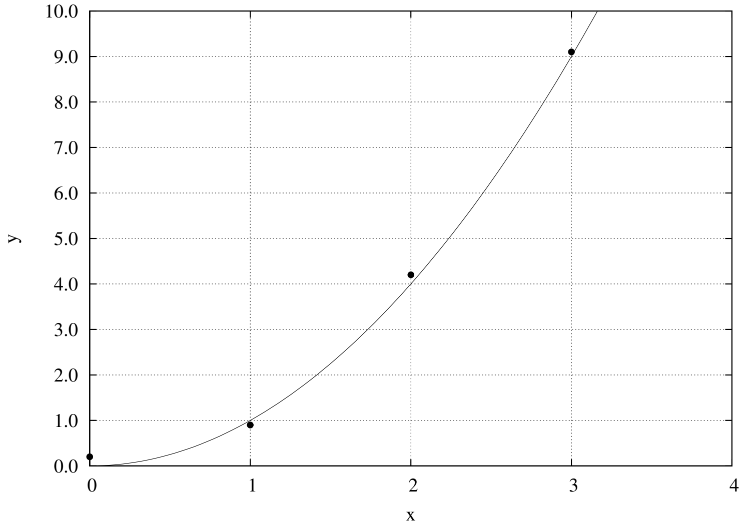
$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_1 &= [1,0,0]^\intercal, & \boldsymbol{g}_1 &= [\cos\beta, 0, -\operatorname{sen}\beta]^\intercal,\\ \boldsymbol{f}_2 &= [0,1,0]^\intercal, & \boldsymbol{g}_2 &= [0,1,0]^\intercal,\\ \boldsymbol{f}_3 &= [0,0,1]^\intercal, & \boldsymbol{g}_3 &= [+\operatorname{sen}\beta, 0, \cos\beta]^\intercal, \end{aligned}$$

porque o giro de β é *negativo*. Segue-se que

$$[\boldsymbol{D}] = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{f}_1\cdot\boldsymbol{g}_1) & (\boldsymbol{f}_1\cdot\boldsymbol{g}_2) & (\boldsymbol{f}_1\cdot\boldsymbol{g}_3)\\ (\boldsymbol{f}_2\cdot\boldsymbol{g}_1) & (\boldsymbol{f}_2\cdot\boldsymbol{g}_2) & (\boldsymbol{f}_2\cdot\boldsymbol{g}_3)\\ (\boldsymbol{f}_3\cdot\boldsymbol{g}_1) & (\boldsymbol{f}_3\cdot\boldsymbol{g}_2) & (\boldsymbol{f}_3\cdot\boldsymbol{g}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \operatorname{sen}\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\operatorname{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [10] A figura abaixo:



mostra uma função passando entre os pontos (0,0, 0,2), (1,0, 0,9), (2,0, 4,2), (3,0, 9,1) e (4,0, 16,3); Estes pontos estão no arquivo `paradados.dat`, cujo conteúdo é

```
0.0 0.2
1.0 0.9
2.0 4.2
3.0 9.1
4.0 16.3
```

Escreva um programa Gnuplot para reproduzi-la.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
set encoding iso_8859_1
set terminal postscript eps monochrome 'Times-Roman' 18
set output 'paradados.eps'
set format y '%3.1f'
set xlabel 'x'
set ylabel 'y'
set xrange [0:4]
set yrange [0:10]
set xtics 0,1
set ytics 0,1
set grid
set nokey
plot 'paradados.dat' using 1:2 with points pt 7 ps 1, x**2 with lines lt 1
exit
```

■

Continue a solução no verso ⟹

3 [30] Utilizando obrigatoriamente uma solução em série do tipo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

Resolva

$$y''(x) + y(x) = 0, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

(ou seja: obtenha os a_n's). Calcule o raio de convergência da série resultante.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\\
y' &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1},\\
y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}
\end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Escolho

$$\begin{aligned}
n &= m-2,\\
m &= n+2
\end{aligned}$$

e o segundo somatório torna-se

$$\sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} x^{m-2}.$$

Note que os 2 primeiros termos ($n = 0$ e $n = 1$) *são identicamente nulos*: isto nos deixa com 2 graus de liberdade: a_0 e a_1 podem ser (neste ponto da solução) quaisquer. Prosseguindo,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[n(n-1) a_n + a_{n-2} \right] x^{n-2} = 0,$$

donde

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n-1)}$$

Partindo agora, respectivamente, de $a_0 = 1$ e de $a_1 = 1$ nós encontramos duas séries LI:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1, & a_1 &= 1,\\
a_2 &= -\frac{1}{2} & a_3 &= -\frac{1}{3\times 2},\\
a_4 &= \frac{1}{4\times 3\times 2} & a_5 &= \frac{1}{5\times 4\times 3\times 2},\\
&\ldots & &\ldots\\
a_{2n} &= \frac{(-1)^n}{(2n)!} & a_{2n+1} &= \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}.
\end{aligned}$$

Segue-se a solução geral da EDO em série é

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Continue a solução no verso ⟹

Vamos agora obter as constantes por meio das condições de contorno:

$$\begin{aligned}
y(0) &= 0 && \Rightarrow && a_0 = 0; \\
y'(0) &= 1 && \Rightarrow && a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)!} x^{2n} \bigg|_{x=0} = 1 \\
& && && a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \bigg|_{x=0} = 1 \\
& && && a_1 \times 1 = 1 \;\Rightarrow\; a_1 = 1.
\end{aligned}$$

Isto completa a obtenção da solução:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \operatorname{sen} x.$$

Buscamos agora o raio de convergência da série:

$$\begin{aligned}
R &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n}} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \times \frac{(2(n+1)+1)!}{(-1)^{n+1}} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} (2n+3) \times (2n+2) = \infty \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [30] Obtenha a série de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{(z-2i)(z-2)}$$

no disco $|z-2| < 2\sqrt{2}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A função pode ser decomposta em frações parciais; com MAXIMA,

```
(%i1) f : 1/((z-2*%i)*(z-2)) ;
                                    1
(%o1)                       ------------------
                            (z - 2) (z - 2 %i)
(%i2) partfrac(f,z);
                       1                     1
(%o2)        --------------------- - ------------------
             (2 %i - 2) (z - 2 %i)   (2 %i - 2) (z - 2)
```

$$f(z) = \frac{1}{(2i-2)(z-2i)} - \frac{1}{(2i-2)(z-2)}$$

O 2º termo já está no formato de um termo da série de Laurent desejada, e nós o deixamos como está. O 1º termo precisa ser reescrito:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2i-2)(z-2i)} &= \frac{1}{(2i-2)}\left[\frac{1}{(z-2)+(2-2i)}\right] \\
&= -\frac{1}{(2i-2)^2}\left[\frac{1}{\frac{z-2}{2-2i}+1}\right] \\
&= -\frac{1}{(2i-2)^2}\left[\frac{1}{1+\frac{z-2}{2-2i}}\right]
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z-2}{2-2i}\right| &= \frac{|z-2|}{|2-2i|} \\
&= \frac{|z-2|}{2\sqrt{2}} < 1,
\end{aligned}$$

donde

$$\frac{1}{1+\frac{z-2}{2-2i}} = 1 - \frac{z-2}{2-2i} + \left(\frac{z-2}{2-2i}\right)^2 - \left(\frac{z-2}{2-2i}\right)^3 - \left(\frac{z-2}{2-2i}\right)^4 + \dots$$

Portanto,

$$f(z) = -\frac{1}{(2i-2)(z-2)} - \frac{1}{(2i-2)^2}\left[1 - \frac{z-2}{2i-2} + \left(\frac{z-2}{2i-2}\right)^3 - \left(\frac{z-2}{2i-2}\right)^3 - \left(\frac{z-2}{2i-2}\right)^4 + \dots\right] \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 01 abr 2011
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

---

1 [15] O programa abaixo, que preenche uma lista `aran` com 1000 valores aleatórios entre 0 e 1 e imprime o seu máximo `amax`, está **errado**. Escreva o programa correto no espaço designado: use uma caractere por quadrícula.

Observação: na listagem abaixo, para facilitar a contagem de colunas para a indentação, os espaços em branco estão enfatizados pelo símbolo ␣.

```
#!/usr/bin/python
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
from __future__ import print_function
from random import random
aran = [random() for i in range(1000)]
for i in range(0,1000):
   if aran[i] > amax:
      amax = aran[i]
print(amax)
```

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
#!/usr/bin/python
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
from __future__ import print_function
from random import random
aran = [random() for i in range(1000)]
amax = aran[0]
for i in range(1,1000):
   if aran[i] > amax:
      amax = aran[i]
print(amax)
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Considere a função $F(x)$ definida pela integral

$$F(x) \equiv \int_1^x \frac{\cos t}{t}\,dt, \qquad x \geq 1.$$

Obtenha uma série para o cálculo de $F(x)$. Sugestão: expanda $\cos t$ em série de Taylor em torno de $t = 0$, e em seguida integre termo a termo. **Tenha o cuidado de integrar o primeiro termo da série em separado**.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_1^x \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!},\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_1^x t^{2n-1}\,dt\\
&= \int_1^x \frac{1}{t}\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_1^x t^{2n-1}\,dt\\
&= \ln x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{2n}\left[x^{2n}-1\right] \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [30] Dado o vetor $\boldsymbol{k} = k_i \boldsymbol{e}_i$, a matriz do tensor

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{k}) = \underbrace{\left[\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\boldsymbol{k}|^2}\right]}_{P_{ij}} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j$$

na base canônica $E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ é $[P_{ij}]$. Dada uma rotação de E para $E' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$,

$$\boldsymbol{e}'_l = C_{il}\boldsymbol{e}_i \Longleftrightarrow \boldsymbol{e}_i = C_{il}\boldsymbol{e}'_l,$$

a expressão de $\boldsymbol{P}$ na base E' é

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{k}) = P'_{lm}\boldsymbol{e}'_l\boldsymbol{e}'_m.$$

Obtenha as componentes P'_{lm} em termos de k'_l e k'_m, onde $\boldsymbol{k} = k'_l\boldsymbol{e}'_l$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= \left[\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\boldsymbol{k}|^2}\right] C_{il}\boldsymbol{e}'_l C_{jm}\boldsymbol{e}'_m \\
&= \left[C_{il}C_{jm}\delta_{ij} - \frac{[C_{il}k_i][C_{jm}k_j]}{|\boldsymbol{k}|^2}\right] \boldsymbol{e}'_l\boldsymbol{e}'_m, \\
&= \left[C_{il}C_{im} - \frac{[C_{il}k_i][C_{jm}k_j]}{|\boldsymbol{k}|^2}\right] \boldsymbol{e}'_l\boldsymbol{e}'_m, \\
&= \left[\delta_{lm} - \frac{[C_{il}k_i][C_{jm}k_j]}{|\boldsymbol{k}|^2}\right] \boldsymbol{e}'_l\boldsymbol{e}'_m.
\end{aligned}$$

Basta agora reconhecer que $[C_{il}k_i] = k'_l$ e $[C_{jm}k_j] = k'_m$:

$$\boldsymbol{P} = \left[\delta_{lm} - \frac{k'_l k'_m}{|\boldsymbol{k}|^2}\right] \boldsymbol{e}'_l\boldsymbol{e}'_m \;\blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [30] Obtenha a solução geral da equação diferencial ordinária linear de ordem 3

$$u''' - u'' - 4u' + 4u = 0$$

transformando-a, **obrigatoriamente**, em um sistema de equações de ordem 1 do tipo

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{u}] = [\boldsymbol{A}][\boldsymbol{u}], \qquad [\boldsymbol{u}] = \begin{bmatrix} u(t) \\ u'(t) \\ u''(t) \end{bmatrix},$$

e em seguida diagonalizando $[\boldsymbol{A}]$. **Prossiga até obter a solução geral** $u(t) = \ldots$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Fazemos $v = u'(t)$, $w = v'(t) = u''(t)$; então,

$$u''' = -4u + 4u' + u'' \Rightarrow w' = -4u + 4v + w$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= w, \\ \frac{dw}{dt} &= -4u + 4v + w. \end{aligned}$$

Em forma matricial

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

com Maxima:

```
(%i1) a : matrix( [0,1,0], [0,0,1],[-4,4,1]) ;
                                        [  0   1  0 ]
                                        [           ]
(%o1)                                   [  0   0  1 ]
                                        [           ]
                                        [ - 4  4  1 ]
(%i2) eigenvectors(a);
(%o2) [[[2, - 2, 1], [1, 1, 1]], [[[1, 2, 4]], [[1, - 2, 4]], [[1, 1, 1]]]]
```

os autovalores e autovetores são

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 & \boldsymbol{f}_1 &= (1, 2, 4), \\ \lambda_2 &= -2 & \boldsymbol{f}_2 &= (1, -2, 4), \\ \lambda_3 &= 1 & \boldsymbol{f}_3 &= (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Na base dos autovetores, o sistema de equações diferenciais ordinárias fica desacoplado:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u_f \\ v_f \\ w_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_f \\ v_f \\ w_f \end{bmatrix}$$

com solução

$$u_f = c_1 e^{2t}, \qquad v_f = c_2 e^{-2t}, \qquad w_f = c_3 e^t.$$

A solução geral é

$$\boldsymbol{u} = c_i e^{\lambda_{(i)} t} \boldsymbol{f}_i$$

ou (voltando à base canônica)

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = c_1 e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} + c_3 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou seja:

$$\begin{aligned} u(t) &= [2c_1]e^{2t} + [-2c_2]e^{-2t} + c_3 e^t \\ &= k_1 e^{2t} + k_2 e^{-2t} + k_3 e^t \ \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 02 mai 2011
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO

Assinatura: ______________________

---

1 [20] Você deseja calcular

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1},$$

mas está em uma ilha deserta, esqueceu tudo de Cálculo, e tudo o que tem à disposição é um pequeno *netbook* com um interpretador Python. **Utilizando o espaço designado abaixo, e escrevendo um caractere por coluna,** escreva um pequeno programa:

1. que especifique uma precisão `eps = 1.0e-4` para o cálculo de L;
2. que utilize uma variável inteira `n`, e que a vá incrementando de 1 em 1;
3. que recalcule L e calcule a diferença `delta` entre o novo valor e o antigo;
4. que pare quando `delta < eps`, e imprima o último valor encontrado para L.

É obrigatório usar as variáveis com nome especificado em tipo monoespaçado (tipo "máquina de escrever") acima. Dê o nome que quiser para quaisquer outras variáveis, objetos, funções, etc., que sejam necessários.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
#!/usr/bin/python
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
from __future__ import unicode_literals
from __future__ import print_function
from __future__ import division
eps = 1.0e-4
n = 1
delta = eps                    # diferenças de L
Lold = 0.0                     # valor anterior de L
while delta >= eps:            # ... até atingir a precisão
   Lnew = n/(n+1)              # esta divisão produz um float
   delta = abs(Lnew - Lold)
   print("%8.4f" % Lnew)
   Lold = Lnew
   n += 1
```

■

Continue a solução no verso ⟹

2 [30] Calcule a série de Laurent de $f(z) = 1/(z-2)$ em torno de $z = 0$ para o disco $2 < |z|$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Note que

$$|z| > 2 \Rightarrow \left|\frac{2}{z}\right| < 1.$$

A idéia portanto é manipular algebricamente

$$\frac{1}{z-2}$$

para fazer aparecer, explicitamente, $2/z$. Vamos a isto:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-2} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-2/z}\\ &= \frac{1}{z}\left[1 + (2/z) + (2/z)^2 + (2/z)^3 + \ldots\right] \qquad (|z| > 2).\end{aligned}$$

Portanto, em $|z| > 2$,

$$\frac{1}{z-2} = \left[\ldots + \frac{2^3}{z^4} + \frac{2^2}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z}\right] \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Calcule o determinante de

$$[\boldsymbol{B}] = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
(%i2) B : matrix( [4,3,0,1], [4,2,0,0], [4, 1, 0, 0], [4, 0, 1, 0] ) ;
                                [ 4  3  0  1 ]
                                [            ]
                                [ 4  2  0  0 ]
(%o2)                           [            ]
                                [ 4  1  0  0 ]
                                [            ]
                                [ 4  0  1  0 ]
(%i3) determinant(B);
(%o3)                                 4
```

■

Continue a solução no verso ⟹

4 [30] Obtenha a solução geral da equação diferencial ordinária linear de ordem 2

$$z'' + z = e^{ix},$$

onde $x \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$. **Sugestões: (i) o lado direito da equação diferencial é *complexo*: use notação e álgebra complexas para resolver o problema; (ii) use variação de parâmetros.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A solução da equação homogênea associada é

$$z_h(x) = Ae^{ix} + Be^{-ix}.$$

Tente:

$$\begin{aligned} z(x) &= A(x)e^{ix} + Be^{-ix}, \\ z'(x) &= iA(x)e^{ix} - iB(x)e^{-ix} + \underbrace{A'(x)e^{ix} + B'(x)e^{-ix}}_{=0}. \end{aligned}$$

Aqui nós controlamos a ordem das derivadas obrigando o termo em A' e em B' a ser nulo. Agora, a 2ª derivada é

$$z''(x) = -[Ae^{ix} + Be^{ix}] + i[A'e^{ix} - B'e^{-ix}].$$

Substituindo na equação diferencial original encontramos agora o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{aligned} A'e^{ix} - B'e^{-ix} &= e^{ix}/i, \\ A'e^{ix} + B'e^{-ix} &= 0. \end{aligned}$$

A segunda equação acima nada mais é do que a condição imposta acima para controlar as derivadas. Somando,

$$\begin{aligned} 2A'e^{ix} &= \frac{1}{i}e^{ix}, \\ 2\frac{dA}{dx} &= -i, \\ \frac{dA}{dx} &= -\frac{i}{2}, \\ A(x) &= -\frac{i}{2}x + \alpha. \end{aligned}$$

Procuramos agora por B:

$$\begin{aligned} A'e^{ix} + B'e^{-ix} &= 0, \\ -\frac{i}{2}e^{ix} + \frac{dB}{dx}e^{-ix} &= 0, \\ -\frac{i}{2}e^{2ix} + \frac{dB}{dx} &= 0, \\ \frac{dB}{dx} &= \frac{i}{2}e^{2ix} = \frac{2ie^{2ix}}{4}, \\ B(x) &= \frac{1}{4}e^{2ix} + \beta. \end{aligned}$$

Substituindo $A(x)$ e $B(x)$ na forma proposta para a solução,

$$\begin{aligned} z(x) &= \left(-\frac{ix}{2} + \alpha\right)e^{ix} + \left(\frac{1}{4}e^{2ix} + \beta\right)e^{-ix} \\ &= \underbrace{\left[-\frac{ix}{2} + \frac{1}{4}\right]e^{ix}}_{z_p(x)} + \alpha e^{ix} + \beta e^{-ix}, \end{aligned}$$

onde $z_p(x)$ é a solução particular ∎

Continue a solução no verso ⟹

TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 27 mai 2011
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO   Assinatura: ____________________

---

1 [30] Dada a equação diferencial ordinária

$$xy'' + xy' + y = 0 :$$

a) [05] Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular.

b) [25] Obtenha **uma** solução de Frobenius do tipo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Começo escrevendo a equação na forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = y'' + y' + \frac{1}{x}y = 0.$$

As funções

$$[xp(x)] = x, \qquad \text{e} \qquad [x^2q(x)] = x$$

são analíticas em $x = 0$, e $x = 0$ é um ponto singuar regular, em torno do qual é possível obter uma solução de Frobenius,

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}, \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial, encontro

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.$$

Faço agora no primeiro somatório:

$$\begin{aligned} m + r &= n + r - 1, \\ m &= n - 1, \\ n &= m + 1, \end{aligned}$$

e obtenho

$$\begin{aligned} \sum_{m=-1}^{\infty} (m+r)(m+r+1) a_{m+1} x^{m+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n &= 0, \\ (r-1) r a_0 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r+1) a_{n+1} + (n+r) a_n + a_n \right] x^{n+r} &= 0, \\ (r-1) r a_0 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r+1) a_{n+1} + (n+r+1) a_n \right] x^{n+r} &= 0. \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

É evidente que, com $a_0 \neq 0$, a equação indicial é

$$r(r-1) = 0 \ \Rightarrow \ r_2 = 0 \text{ ou } r_1 = 1.$$

As raízes diferem por um inteiro; ou a menor raiz leva a 2 soluções, ou não leva a nenhuma. Tentemos com a menor raiz ($r_2 = 0$):

$$\begin{aligned} n(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_n &= 0, \\ a_{n+1} &= -\frac{1}{n}a_n. \end{aligned}$$

Note que é impossível obter a_1 a partir de a_0: a recursão falha, e a menor raiz não leva a nenhuma solução. Uma única solução ainda é possível com a maior raiz $r_1 = 1$:

$$\begin{aligned} (n+1)(n+2)a_{n+1} + (n+2)a_n &= 0, \\ a_{n+1} &= -\frac{1}{n+1}a_n. \end{aligned}$$

Fazendo $a_0 = 1$ sem perda de generalidade, não é difícil encontrar o termo geral:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$$

e uma solução

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1} \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [30] Calcule

$$\mathscr{L}\{\cosh t\}(s)$$

usando obrigatoriamente a definição

$$\mathscr{L}\{f(t)\} \equiv \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

(ou seja: calculando a integral). Se você só colocar a resposta certa porque a decorou, não ganhará a questão.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
São muitas as opções; por exemplo,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-st}\cosh t\,dt &= \int_0^\infty e^{-st}\frac{e^t+e^{-t}}{2}\,dt \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{2}\left[e^{(1-s)t}+e^{-(1+s)t}\right]dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-s}\int_0^\infty e^{(1-s)t}(1-s)\,dt - \frac{1}{1+s}\int_0^\infty e^{-(1+s)t}(-(1+s))\,dt\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1-s}+\frac{1}{1+s}\right] = \frac{s}{s^2-1} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [10] Refaça a questão **2** usando **uma linha** de Maxima.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
integrate(cosh(t)*exp(-s*t),t,0,inf) ;
```

---

4 [30] Calcule a transformada de Laplace inversa

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2+6s+3}{s^3+4s^2+3s}\right\}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\mathscr{L}\{e^{-2t}\cosh t+1\} = \frac{2s^2+6s+3}{s^3+4s^2+3s}.$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04, 22 jun 2011
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [25] Obtenha o resíduo (isto é: o coeficiente c_{-1} da série de Laurent respectiva) de

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+1)^2}$$

em torno de $z = i$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Esta é uma questão de aplicação de fórmula: o pólo é de ordem 2: $k = 2$, e

$$\begin{aligned} c_{-1} &= \lim_{z\to i} \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z-i)^k f(z)\right] \\ &= \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\frac{z}{(z+i)^2} \\ &= \lim_{z\to i} -\frac{(z-i)}{(z+i)^3} = 0 \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Calcule a integral

$$\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

Sugestão: Às vezes, Cálculo I é mais útil do que Cálculo IV.

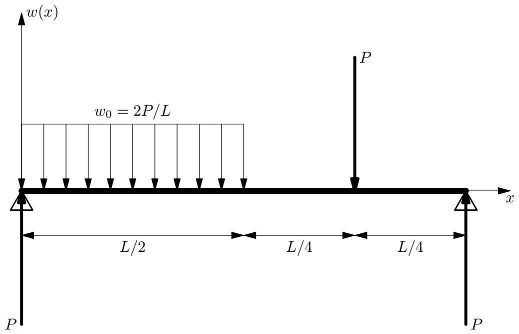
SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A função é ímpar, e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0$; integrar a função complexa da questão 1 em um contorno composto por uma linha sobre o eixo x e um semi-círculo vai produzir uma integral nula, porque $c_{-1} = 0$; *moral da história*: não adianta tentar integração de contorno! Em lugar disto, basta fazer

$$\begin{aligned}
u &= x^2+1,\\
du &= 2x\,dx,\\
\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{du}{u^2}\,du\\
&= -\frac{1}{2u}\bigg|_1^\infty = 1/2 \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] A viga da figura abaixo está *equilibrada.*



a) [10] Escreva uma expressão para o carregamento distribuído $w(x)$ *total*, incluindo todas as cargas mostradas, em função da delta de Dirac δ e da Heaviside H; utilize a convenção de que a direção positiva aponta para cima.

b) [15] Calcule o esforço cortante

$$V(x) = \int_{0_-}^{x} w(\xi)\, d\xi.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$w(x) = P\delta(x) - \frac{2P}{L}\left[H(x) - H(x - L/2)\right] - P\delta(x - 3L/4) + P\delta(x - L).$$

b)

$$V(x) = \int^{x} w(\xi)\, d\xi$$

Vamos fazer, com cuidado, a única integral que importa!

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x} H(\xi - a)\, d\xi &= 0 \qquad \text{quando} \qquad x < a;\\
\int_{-\infty}^{x} H(\xi - a)\, d\xi &= \int_{a}^{x} d\xi\\
&= (x - a) \qquad \text{quando} \qquad x \geq a;
\end{aligned}$$

portanto,

$$\int_{-\infty}^{x} H(\xi - a)\, d\xi = H(x - a)(x - a).$$

Com isto, a integração de $w(x)$ é imediata:

$$\begin{aligned}
V(x) &= \int_{-\infty}^{x} w(\xi)\, d\xi\\
&= \int_{-\infty}^{x} \left[P\delta(\xi) - \frac{2P}{L}\left[H(\xi) - H(\xi - L/2)\right] - P\delta(\xi - 3L/4) + P\delta(\xi - L)\right] d\xi\\
&= PH(x) - \frac{2P}{L}\left[H(x)x - H(x - L/2)(x - L/2)\right] - PH(x - 3L/4) + PH(x - L) \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] Utilizando obrigatoriamente autovalores e autovetores, obtenha a solução geral do sistema de equações diferenciais

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

O problema de autovalor-autovetor associado é

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\1 & \lambda\end{vmatrix} = 0.$$

Os autovalores e autovetores são

$$\begin{aligned}
\lambda &= -1 & &\Rightarrow & \boldsymbol{f}_1 &= (1,-1);\\
\lambda &= +1 & &\Rightarrow & \boldsymbol{f}_2 &= (1,1).
\end{aligned}$$

Escreva a solução na base dos autovetores:

$$\boldsymbol{u} = v_1\boldsymbol{f}_1 + v_2\boldsymbol{f}_2;$$

nesta base, o problema é

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix},$$

donde:

$$\begin{aligned}
\frac{dv_1}{dx} &= -v_1, & v_1 &= k_1 e^{-x},\\
\frac{dv_2}{dx} &= v_2, & v_2 &= k_2 e^{x};
\end{aligned}$$

A solução é

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}(x) &= (u_1,u_2)\\
&= v_1\boldsymbol{f_1} + v_2\boldsymbol{f_2}\\
&= k_1e^{-x}(1,-1) + k_2e^{x}(1,1) \;\Rightarrow\\
u_1(x) &= k_1e^{-x} + k_2e^{x},\\
u_2(x) &= -k_1e^{-x} + k_2e^{x} \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
F, 04 jul 2011
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [25] A série de Taylor do arco-tangente em torno de $x = 0$ é

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

a) [10] Esta é uma série de potências: calcule o seu raio de convergência.

b) [15] Escreva um programa em Python que calcule $\operatorname{arctg}(1/2)$ com erro menor que 1×10^{-6}. **Observação:** a indentação é fundamental em Python: use "␣" para indicar seus espaços em branco!

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a)

$$\begin{aligned}
R &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{2n-1}\frac{2n+1}{1}\right| = 1.
\end{aligned}$$

b) $x = 0{,}5$ está dentro do raio de convergência; vamos usar o programa `arctg2.py`

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] A *contração* de dois tensores $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ é definida por

$$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j : B_{lm}\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m \equiv A_{ij}B_{lm}(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_l)(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_m).$$

Se $\boldsymbol{S}$ é um tensor simétrico de ordem 2, e $\boldsymbol{A}$ é um tensor anti-simétrico de ordem 2:

$$\boldsymbol{S} = S_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j,\ S_{ij} = S_{ji}; \qquad \boldsymbol{A} = A_{lm}\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m,\ S_{lm} = -S_{ml},$$

mostre que

$$\boldsymbol{S} : \boldsymbol{A} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S} : \boldsymbol{A} &= S_{ij}A_{lm}(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_l)(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_m). \\
&= S_{ij}A_{lm}\delta_{jl}\delta_{im} \\
&= S_{ij}A_{ji} \\
&= \frac{1}{2}S_{ij}A_{ji} + \frac{1}{2}S_{ji}A_{ij} \\
&= \frac{1}{2}S_{ij}\left(A_{ji} + A_{ij}\right) = 0 \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Encontre a solução geral da equação diferencial

$$x^2y'' + 4xy' - 8y = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$y = c_1 x^{\frac{\sqrt{41}}{2} - 3/2} + c_2 x^{-\frac{\sqrt{41}}{2} - 3/2}.$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] Utilizando obrigatoriamente integração de contorno no plano complexo, e a fórmula de inversão

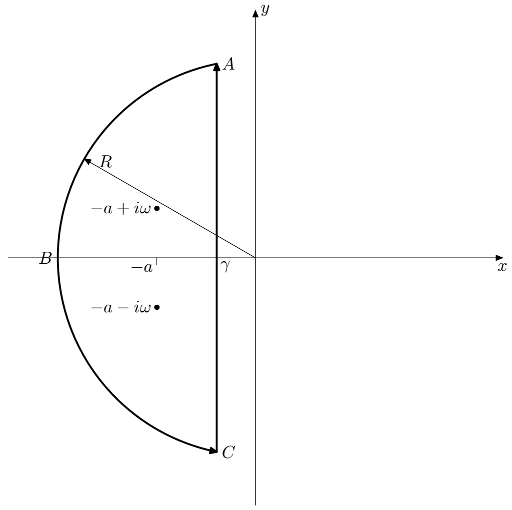
$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \overline{f}(s) e^{+st}\, ds,$$

obtenha a transformada inversa de Laplace de

$$\overline{f}(s) = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}, \qquad \omega, a \in \mathbb{R}_+.$$

Atente para os sinais de ω e de a; utilize o contorno CABC da figura ao lado (com $R \to \infty$), onde

$$-a < \gamma < 0.$$



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Procuramos as singularidades de $\overline{f}(s)$ no plano complexo:

$$\begin{aligned}
(s+a)^2 + \omega^2 &= 0,\\
(s+a)^2 &= -\omega^2,\\
s + a &= \pm i\omega,\\
s &= -a \pm i\omega.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema dos Resíduos,

$$\oint_{CABC} \overline{f}(s) e^{st}\, ds = 2\pi i \left[c_{-1}^{(1)} + c_{-1}^{(2)}\right],$$

onde os resíduos são calculados em $-a \pm i\omega$; agora:

$$\begin{aligned}
\alpha = \theta &= \pi - \arccos\frac{-\gamma}{R},\\
\beta &= \pi + \arccos\frac{-\gamma}{R},\\
\lim_{R\to\infty}\left|\int_{ABC} \overline{f}(s) e^{st}\, ds\right| &= \lim_{R\to\infty}\left|\int_\alpha^\beta \overline{f}(s) iRe^{i\theta} e^{st}\, d\theta\right|\\
&\le \lim_{R\to\infty}\int_\alpha^\beta \left|\overline{f}(s) iRe^{i\theta} e^{st}\right|\, d\theta\\
&= \lim_{R\to\infty}\int_\alpha^\beta \left|\frac{\omega R e^{(s_x + is_y)t}}{(Re^{i\theta} + a)^2 + \omega^2}\right|\, d\theta\\
&= \lim_{R\to\infty}\int_\alpha^\beta \left|\frac{\omega R e^{s_x t}}{(Re^{i\theta} + a)^2 + \omega^2}\right|\, d\theta\\
&\le \lim_{R\to\infty}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left|\frac{\omega R}{(Re^{i\theta} + a)^2 + \omega^2}\right|\, d\theta \qquad (\text{pois } e^{s_x t} < 1)\\
&= \lim_{R\to\infty}\left|\frac{\pi\omega R}{(Re^{i\theta_*} + a)^2 + \omega^2}\right| \qquad (\text{pelo Teorema do Valor Médio, para } \pi/2 \le \theta_* \le 3\pi/2)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \overline{f}(s) e^{+st}\, ds = c_{-1}^{(1)} + c_{-1}^{(2)}.$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Mas

$$
\begin{aligned}
\overline{f}(s)e^{st} &= \frac{\omega e^{st}}{(s-[-a+i\omega])(s-[-a-i\omega])},\\
c_{-1}^{(1)} &= \lim_{s\to[-a+i\omega]}(s-[-a+i\omega])\frac{\omega e^{st}}{(s-[-a+i\omega])(s-[-a-i\omega])}\\
&= \lim_{s\to[-a+i\omega]}\frac{\omega e^{st}}{s-[-a-i\omega]}\\
&= \frac{\omega e^{(-a+i\omega)t}}{2i\omega};\\
c_{-1}^{(2)} &= \lim_{s\to[-a-i\omega]}(s-[-a-i\omega])\frac{\omega e^{st}}{(s-[-a+i\omega])(s-[-a-i\omega])}\\
&= \lim_{s\to[-a-i\omega]}\frac{\omega e^{st}}{s-[-a+i\omega]}\\
&= -\frac{\omega e^{(-a-i\omega)t}}{2i\omega};\\
f(t) &= c_{-1}^{(1)}+c_{-1}^{(2)}\\
&= \omega e^{-at}\frac{1}{2i\omega}\left[e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}\right]\\
&= e^{-at}\operatorname{sen}\omega t \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$