TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 26 Mar 2010
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: SOLUÇÃO Assinatura: ____________________

---

1 [25] Os alunos de intercâmbio Helmut Fokka e Lin Ping-Guim embarcaram juntamente com o aluno de Engenharia Ambiental da UFPR João Biente no navio oceanográfico do Departamento de Engenharia Ambiental, o *Tiranic*, em direção à Antártida. O trabalho de Fokka & Ping-Guim é gerar matrizes de rotação que são utilizadas por João Biente para corrigir medições de velocidade do vento. Quando Fokka e Ping-Guim forneceram a seguinte matriz:

$$
\begin{bmatrix}
\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0
\end{bmatrix},
$$

Biente reclamou: "Esta **não** é uma matriz de rotação!" Quem está certo? **Justifique matematicamente.** (*Sugestão*: rotações mapeiam volumes unitários em volumes unitários).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Para que esta seja uma matriz de rotação, seu determinante tem que ser +1. Vejamos:

$$
\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix}
\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0
\end{bmatrix}
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \det \begin{bmatrix}
1 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\
1 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\
1 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0
\end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{6}} \det \begin{bmatrix}
1 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\
1 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\
1 & -2 & 0
\end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{2}} \det \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & -2 & 0
\end{bmatrix} = 0,
\end{aligned}
$$

pois duas linhas da matriz acima são iguais (LD). Logo, o determinante é diferente de +1, e esta não pode ser uma matriz de rotação ∎

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Se

$$\boldsymbol{A} = A_{lm}\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m, \qquad \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y} = \epsilon_{ijk}x_iy_j\boldsymbol{e}_k,$$

obtenha uma expressão em notação indicial para

$$\boldsymbol{A}\cdot[\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}].$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\cdot[\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}] &= A_{lm}\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m\cdot\epsilon_{ijk}x_iy_j\boldsymbol{e}_k\\
&= A_{lm}x_iy_j\epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_l(\boldsymbol{e}_m\cdot\boldsymbol{e}_k)\\
&= A_{lm}x_iy_j\epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_l\delta_{mk}\\
&= A_{lk}x_iy_j\epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_l \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Obtenha os autovalores e os autovetores da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Com MAXIMA:

```
(%i1) a : matrix( [1,0,0], [0,2,0],[0,0,-1]) ;
                                    [ 1  0   0  ]
                                    [           ]
(%o1)                               [ 0  2   0  ]
                                    [           ]
                                    [ 0  0  - 1 ]
(%i2) eigenvectors(a);
(%o2) [[[- 1, 1, 2], [1, 1, 1]], [[[0, 0, 1]], [[1, 0, 0]], [[0, 1, 0]]]]
```

Os autovalores são os próprios elementos da diagonal: 1, 2 e -1. Os autovetores são, nesta ordem: $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ ■

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Se

$$F(x,y,z) = x + 2y^2 + 3z^3$$

e o segmento de reta Γ é

$$\Gamma : \qquad \begin{aligned} x &= t, \\ y &= 2t, \qquad t \in [0,1], \\ z &= 3t, \end{aligned}$$

calcule a integral de linha

$$I = \int_\Gamma F(x,y,z)\, ds.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Uma forma bem "cinemática", ou seja, bem "física", de resolver é a seguinte:

$$\boldsymbol{r} = (t, 2t, 3t) \Rightarrow \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (1,2,3).$$

A "velocidade" $\boldsymbol{v}$ é $(1,2,3)$. Se módulo é

$$v = |\boldsymbol{v}| = |(1,2,3)| = \sqrt{14}.$$

Agora

$$\begin{aligned} \int_\Gamma F(x,y,z)\, ds &= \int_{t=0}^1 [t + 2(2t)^2 + 3(3t)^3] v\, dt \\ &= \int_0^1 [t + 8t^2 + 81t^3]\sqrt{14}\, dt \\ &= \sqrt{14} \int_0^1 [t + 8t^2 + 81t^3]\, dt \\ & \frac{281\sqrt{14}}{12} \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 30 Abr 2010
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO   Assinatura: ____________________

---

1 [30] Utilizando eliminação de Gauss (para zerar os termos abaixo da diagonal da matriz do sistema), resolva

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 10 \\ 23 \end{bmatrix}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & | & 16 \\ 2 & 1 & 1 & | & 10 \\ 3 & 4 & 2 & | & 23 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & | & 16 \\ 0 & 2 & 0 & | & 6 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & | & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & | & 16 \\ 0 & 2 & 0 & | & 6 \\ 0 & 0 & 1/2 & | & 1/2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [30] Sejam $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ e

$$
\begin{aligned}
u : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\
z &\mapsto u(z)
\end{aligned}
$$

uma função complexa de uma variável complexa. Encontre a solução geral da equação diferencial

$$
\frac{d^2u}{dz^2} - 2\mathrm{i}\frac{du}{dz} + \mathrm{i}^2 u = 0.
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A equação característica

$$
\lambda^2 - 2\mathrm{i}\lambda + \mathrm{i}^2 = 0
$$

possui raiz dupla $\lambda = \mathrm{i}$. Então, uma solução é

$$
u_1(z) = e^{\mathrm{i}z}.
$$

Uma segunda solução LI deve ser buscada com o método de variação de parâmetros:

$$
\begin{aligned}
v &= A(z)e^{\mathrm{i}z}; \\
\frac{dv}{dz} &= (A' + \mathrm{i}A)e^{\mathrm{i}z}; \\
\frac{d^2v}{dz^2} &= (A'' + 2\mathrm{i}A' + \mathrm{i}^2 A)e^{\mathrm{i}z}.
\end{aligned}
$$

Substituindo na equação diferencial,

$$
\begin{aligned}
(A'' + 2\mathrm{i}A' + \mathrm{i}^2 A) - 2\mathrm{i}(A' + \mathrm{i}A) + \mathrm{i}^2 A &= 0; \\
A'' &= 0; \\
A &= c_1 + c_2 z.
\end{aligned}
$$

A solução geral será

$$
u(z) = A(z)e^{\mathrm{i}z} = (c_1 + c_2 z)e^{\mathrm{i}z} \blacksquare
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [40] Encontre a série de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{z(z+3)}$$

em torno de $z = -3$ no disco $|z+3| < 3$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(z+3)} &= \frac{1}{(z+3)}\frac{1}{(z+3-3)};\\
t &= z+3;\\
\frac{1}{z(z+3)} &= \frac{1}{t}\frac{1}{(t-3)}\\
&= \frac{1}{t}\frac{1/3}{\left(\frac{t}{3}-1\right)}\\
&= \frac{-1/3}{t}\frac{1}{1-\frac{t}{3}}\\
&= \frac{-1}{3t}\left[1+\frac{t}{3}+\left(\frac{t}{3}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^3+\ldots\right]\\
&= \frac{-1}{3(z+3)}\left[1+\frac{z+3}{3}+\left(\frac{z+3}{3}\right)^2+\left(\frac{z+3}{3}\right)^3+\ldots\right]\\
&= -\frac{1}{9}\left[\frac{3}{z+3}+1+\frac{z+3}{3}+\left(\frac{z+3}{3}\right)^2+\ldots\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

É interessante notar que separar em frações parciais logo no início *também* conduz à solução!

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{3z}-\frac{1}{3(z+3)}\\
&= \frac{1}{3(t-3)}-\frac{1}{3t}\\
&= -\frac{1}{3t}+\frac{1/3}{3(\frac{t}{3}-1)}\\
&= -\frac{1}{3t}-\frac{1}{9(1-\frac{t}{3})}\\
&= -\frac{3}{9t}-\frac{1}{9}\frac{1}{1-t/3}\\
&= -\frac{1}{9}\frac{3}{t}-\frac{1}{9}\left[1+\frac{t}{3}+\left(\frac{t}{3}\right)^2+\ldots\right]\\
&= -\frac{1}{9}\left[\frac{3}{t}+1+\frac{t}{3}+\left(\frac{t}{3}\right)^2+\ldots\right]\\
&= -\frac{1}{9}\left[\frac{3}{z+3}+1+\frac{z+3}{3}+\left(\frac{z+3}{3}\right)^2+\ldots\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 28 Mai 2010
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

---

1 [30] Resolva:

$$(1-x^2)\frac{dy}{dx} + xy = x^2.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Como não há condição inicial indicada, trata-se da solução geral. Faça

$$
\begin{aligned}
y &= uv,\\
\frac{dy}{dx} &= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx},\\
(1-x^2)\left[u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right] + xuv &= x^2,\\
\underbrace{u\left[(1-x^2)\frac{dv}{dx} + xv\right]}_{=0} + (1-x^2)v\frac{du}{dx} &= x^2,\\
(1-x^2)\frac{dv}{dx} &= -xv,\\
\frac{dv}{v} &= -\frac{x\,dx}{1-x^2},\\
\ln|v| &= \left|\frac{1}{2}\ln(1-x^2)\right| + \underbrace{k'}_{=\ln|k_1|},\\
\ln|v| &= \ln|k1| + \ln(1-x^2)^{1/2},\\
v &= k_1(1-x^2)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Resta integrar:

$$
\begin{aligned}
k_1(1-x^2)^{3/2}\frac{du}{dx} &= x^2,\\
k_1\frac{du}{dx} &= \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}},\\
k_1 u &= \int \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx\\
&= \int \underbrace{\frac{x}{1-x^2}}_{U}\,\underbrace{\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}}_{dV};\\
&= -\frac{x}{1-x^2}\sqrt{1-x^2} - \int\left(-\sqrt{1-x^2}\right)\left[\frac{1}{1-x^2} + \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}\right]dx;\\
k_1 u &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + 2\underbrace{\int \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}\,dx}}_{k_1 u};\\
k_1 u &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \operatorname{arcsen} x + k_2;\\
u &= \frac{1}{k_1}\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \operatorname{arcsen} x + k_2\right];\\
y = uv &= \frac{1}{k_1}\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \operatorname{arcsen} x + k_2\right]k_1(1-x^2)^{1/2}\\
&= x - \sqrt{1-x^2}\,\operatorname{arcsen} x + C \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Seja $u = \ln z = \ln re^{i\theta} = \ln r + i\theta$ a função logaritmo definida pelo corte $\{z = (x, y) \mid -\infty < x \leq 0;\ y = 0\}$ de tal maneira que $-\pi < \theta \leq \pi$. Calcule

$$\ln\left[\left(\frac{1-i}{1+i}\right)\right].$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\frac{1-i}{1+i} &= \frac{(1-i)^2}{1-i^2} = \frac{(1-i)^2}{2};\\
(1-i) &= (1,-1) = \sqrt{2}[\cos\pi/4 - i\,\mathrm{sen}\,\pi/4] = \sqrt{2}e^{-i\pi/4};\\
\frac{(1-i)^2}{2} &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right]^2 = \frac{1}{2}2e^{-i\pi/2};
\end{aligned}$$

finalmente,

$$\ln e^{-i\pi/2} = -i\frac{\pi}{2}\ \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [30] Obtenha a solução de Frobenius de

$$x^2y'' + 2xy' + (x^2 - 2)y = 0$$

correspondente à maior raiz da equação indicial.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}; \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}; \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2}. \end{aligned}$$

Junte tudo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r} + 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r+2} = 0.$$

O somatório discordante é o último:

$$\begin{aligned} m+r+2 &= n+r; \\ m+2 &= n; \\ m &= n-2. \end{aligned}$$

Então:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r} + 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r} = 0.$$

Separe os casos $n = 0$ e $n = 1$:

$$\begin{aligned} &[(r-1)r + 2r - 2]\, a_0 x^r + [r(r+1) + 2(r+1) - 2]\, a_1 x^{r+1} + \\ &\qquad \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ [(n+r-1)(n+r) + 2(n+r) - 2]\, a_n + a_{n-2} \right\} x^{n+r} = 0. \end{aligned}$$

A equação indicial é $r^2 + r - 2 = 0$; as raízes são $r = -2$ e $r = 1$. A maior raiz sempre leva a *uma* solução, que é o que se pede. Para $r = 1$, o coeficiente de a_1 é 4, donde $a_1 = 0$. Salvam-se apenas os a's ímpares. A relação de recursão é

$$\begin{aligned} [n(n+1) + 2(n+1) - 1]\, a_n + a_{n-2} &= 0, \\ a_n &= -\frac{a_{n-2}}{n^2 + 3n}. \end{aligned}$$

A solução é

$$y_1(x) = a_0 \left[x - \frac{1}{10} x^3 + \frac{1}{280} x^5 - \frac{1}{15120} x^7 + \dots \right] \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Calcule a transformada de Laplace de

$$[H(t) - H(t-a)]\frac{t}{a} + [H(t-a) - H(t-2a)](2 - \frac{t}{a}).$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{t}{a} e^{-st}\,dt + \int_a^{2a} \left(2 - \frac{t}{a}\right) e^{-st}\,dt &= \frac{e^{-as}(e^{as} - as - 1)}{as^2} + \frac{e^{-2as}(ase^{as} - e^{as} + 1)}{as^2} \\ &= \frac{e^{-2as}(e^{as} - 1)^2}{as^2}\ \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04, 25 Jun 2010
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Não basta "copiar e colar" da tabela abaixo nas questões: quando um resultado for pedido explicitamente, é preciso deduzi-lo; quando uma das relações da tabela for utilizada, é preciso mencioná-la e justificá-la. Boa prova.

Transformadas de Laplace

$$1 \leftrightarrow \frac{1}{s} \qquad s > 0$$

$$e^{at} \leftrightarrow \frac{1}{s-a} \qquad s > a$$

$$\operatorname{sen} at \leftrightarrow \frac{a}{s^2+a^2} \qquad s > 0$$

$$\cos at \leftrightarrow \frac{s}{s^2+a^2} \qquad s > 0$$

$$\operatorname{senh} at \leftrightarrow \frac{a}{s^2-a^2} \qquad s > |a|$$

$$\cosh at \leftrightarrow \frac{s}{s^2-a^2} \qquad s > |a|$$

$$t^n \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad s > 0,\ n \in \mathbb{N}$$

$$t^p \leftrightarrow \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}} \qquad s > 0,\ p > -1$$

$$e^{at} \operatorname{sen} bt \leftrightarrow \frac{b}{(s-a)^2+b^2} \qquad s > a$$

$$e^{at} \cos bt \leftrightarrow \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2} \qquad s > a$$

$$t \operatorname{sen} at \leftrightarrow \frac{2as}{(s^2+a^2)^2} \qquad s > 0$$

$$t \cos at \leftrightarrow \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2} \qquad s > 0$$

$$t \operatorname{senh} at \leftrightarrow \frac{2as}{(s^2-a^2)^2} \qquad s > a$$

$$t \cosh(at) \leftrightarrow \frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2} \qquad s > a$$

$$t^n e^{at} \leftrightarrow \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \qquad s > a,\ n \in \mathbb{N}$$

$$t^p e^{at} \leftrightarrow \frac{\Gamma(p+1)}{(s-a)^{p+1}} \qquad s > a,\ p > -1$$

$$\ln t \leftrightarrow -\frac{\gamma + \ln s}{s} \qquad s > 0,\ \gamma \approx 0{,}577215665$$

$$H(t-a) \leftrightarrow \frac{e^{-as}}{s} \qquad s > 0,\ a \geq 0$$

$$\delta(t-a) \leftrightarrow e^{-as} \qquad a > 0$$

$$\frac{e^{-a^2/t}}{\sqrt{t}} \leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{s}} e^{-2a\sqrt{s}} \qquad s > 0,\ a \geq 0$$

$$\frac{e^{-a^2/t}}{t^{3/2}} \leftrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-2a\sqrt{s}} \qquad s > 0,\ a \geq 0$$

$$J_0(t) \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \qquad s > 0$$

$$\alpha u(t) + \beta v(t) \leftrightarrow \alpha \overline{u}(s) + \beta \overline{v}(s)$$

$$f'(t) \leftrightarrow s\overline{f}(s) - f(0)$$

$$f''(t) \leftrightarrow s^2 \overline{f}(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n \overline{f}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau \leftrightarrow \frac{\overline{f}(s)}{s}$$

$$\int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau \leftrightarrow \overline{f}(s)\overline{g}(s)$$

$$e^{-at} f(t) \leftrightarrow \overline{f}(s+a)$$

$$H(t-a) f(t-a) \leftrightarrow e^{-as}\overline{f}(s)$$

$$t f(t) \leftrightarrow -\frac{d\overline{f}(s)}{ds}$$

$$\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^\infty \overline{f}(r)\, dr$$

$$f(t) \text{ com período } T \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(t) e^{-st}\, dt$$

1 [30] **Utilizando obrigatoriamente transformada de Laplace**, resolva

$$3y'' + 2y' - 3y = \delta(t), \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0,$$

onde $\delta(t)$ é a delta de Dirac.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A transformada da $\delta(t)$ é

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = \int_0^\infty \delta(t)e^{-st}\,dt = 1.$$

A transformada da equação diferencial inteira é

$$\begin{aligned}
3\left[s^2\overline{y} - sy(0) - y'(0)\right] + 2\left[s\overline{y} - y(0)\right] - 3\overline{y} &= 1,\\
3(s^2\overline{y} - s) + 2(s\overline{y} - 1) - 3\overline{y} &= 1,\\
3s^2\overline{y} - 3s + 2s\overline{y} - 2 - 3\overline{y} &= 1,\\
(3s^2 + 2s - 3)\overline{y} - 3s - 2 &= 1,\\
(3s^2 + 2s - 3)\overline{y} &= 3 + 3s,\\
\overline{y} &= \frac{3(s+1)}{3s^2 + 2s - 3},\\
y(t) &= \frac{2}{\sqrt{10}}e^{-t/3}\,\mathrm{senh}\left(\frac{\sqrt{10}t}{3}\right) + e^{-t/3}\cosh\left(\frac{\sqrt{10}t}{3}\right)\\
&= \frac{\left(\left(\sqrt{10}+2\right)\,e^{\frac{2\,\sqrt{10}\,t}{3}} + \sqrt{10} - 2\right)\,e^{-\frac{\sqrt{10}\,t}{3} - \frac{t}{3}}}{2\,\sqrt{10}} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [30] Obtenha a série de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$$

em torno de $z = 0$ e para a região $|z| > 1$. **SUGESTÃO:** $|1/z| < 1$ na região especificada.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-z} \\
&= \frac{1}{z}\,\frac{1}{z(\frac{1}{z}-1)} \\
&= -\frac{1}{z^2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\
&= -\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots\right) \\
&= -\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}-\ldots \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [40] **Usando <u>obrigatoriamente</u> integração de contorno, calcule**

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4x^2+2x+1}\,dx.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

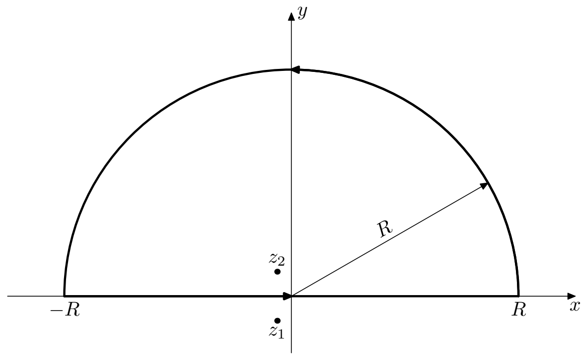
Considero a função

$$f(z) = \frac{1}{4z^2+2z+1},$$

cujos pólos são

$$\begin{aligned} 4z^2+2z+1 &= 0,\\ z_1 &= -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}i}{4},\\ z_2 &= -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}i}{4}. \end{aligned}$$

Antevejo o contorno de integração típico mostrado abaixo,




```
verbatimtex
%&latex
\documentclass{article}
\begin{document}
etex
beginfig(1) ;
  drawarrow (-5cm,0)..(5cm,0) ;
  drawarrow (0,-1cm)..(0,5cm) ;
  pickup pencircle scaled 1.2pt ;
  drawarrow (-4cm,0)--(0,0) ;
  drawarrow (4cm,0)..4cm*dir(45)..(0,4cm) ;
  draw (-4cm,0)..(4cm,0) ;
  draw halfcircle scaled 8cm ;
  label.bot(btex $R$ etex,(4cm,0));
  label.bot(btex $-R$ etex,(-4cm,0));
  pickup pencircle scaled 0.5pt ;
  drawarrow (0,0)--4cm*dir(30);
  label.top (btex $R$ etex, (2cm,0)) rotated 30 ;
  label.bot(btex $x$ etex,(5cm,0));
  label.rt(btex $y$ etex,(0,5cm));
% -----------------------------------------------
% singularidades
% -----------------------------------------------
dotlabel.bot( btex $z_1$ etex,
    1cm*(-1.0/4.0, -sqrt(3.0)/4)) ;
dotlabel.top( btex $z_2$ etex,
    1cm*(-1.0/4.0, sqrt(3.0)/4)) ;
endfig ;
end ;
```

e desejo verificar se a integral sobre o semi-círculo de $f(z)$ tende a zero quando $R \to \infty$:

$$\left| \int_{\text{semi-circ.}} f(z)\,dz \right| \le \int_{\text{semi-circ}} |f(z)\,dz|$$

Mas, sobre o semi-círculo,

$$\begin{aligned} z &= Re^{i\theta},\ 0 \le \theta \le \pi;\\ dz &= iRe^{i\theta}\,d\theta \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{R\to\infty} \int_{\text{semi-circ}} |f(z)\,dz| &= \lim_{R\to\infty} \int_0^\pi \left| \frac{iRe^{i\theta}\,d\theta}{4R^2e^{2i\theta}+2Re^{i\theta}+1} \right| \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_0^\pi \left| \frac{1}{R} \frac{ie^{i\theta}\,d\theta}{4e^{2i\theta}+\frac{1}{R}e^{i\theta}+\frac{1}{R^2}} \right| \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_0^\pi \left| \frac{1}{4R} ie^{-i\theta}\,d\theta \right| \\ &= \frac{\pi}{4R} \to 0. \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Consequentemente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4x^2+2x+1}\,dx = 2\pi i c_{-1}^{(2)}.$$

Resta calcular o resíduo: $z \to z_2 \;\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4z^2+2z+1} &= \frac{1}{4(z-z_1)(z-z_2)} \\
&\sim \frac{1}{4(z_2-z_1)(z-z_2)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}i(z-z_2)} \\
&= \frac{-i}{2\sqrt{3}(z-z_2)} \;\Rightarrow c_{-1}^{(2)} = \frac{-i}{2\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$I = 2\pi i \frac{-i}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \;\blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
F, 09 Jul 2010
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [25] Em um artigo histórico que deu início à moderna Teoria do Caos [E. N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow,*J Atmos Sci*, 1963, v. 20, p. 130–141], Edward Lorenz utilizou a função-corrente

$$\Psi(x,z,t) = A(t)\,\mathrm{sen}(\pi z)\,\mathrm{sen}(ax),\ 0 \le z \le 1,\ -\infty < x < +\infty,$$

onde $a > 0 \in \mathbb{R}$, para representar o escoamento em um fluido entre duas placas devido à convecção livre gerada por uma temperatura maior na placa inferior do que na superior. Sabendo que o campo de velocidade $\boldsymbol{u} = (u, 0, w)$ pode ser recuperado via

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \\ w &= \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \end{aligned}$$

calcule a vorticidade $\boldsymbol{\omega}(x,z,t) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}$, e a divergência do campo de velocidade.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Em 3 D,

$$\boldsymbol{u} = (-\pi A\cos(\pi z)\,\mathrm{sen}(ax), 0, Aa\,\mathrm{sen}(\pi z)\cos(ax));$$

a vorticidade é

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\pi A\cos(\pi z)\,\mathrm{sen}(ax) & 0 & Aa\,\mathrm{sen}(\pi z)\cos(ax) \end{vmatrix} \\ &= \left[\pi^2 A\,\mathrm{sen}(\pi z)\,\mathrm{sen}(ax) + a^2 A\,\mathrm{sen}(\pi z)\,\mathrm{sen}(ax)\right]\boldsymbol{j} \\ &= (\pi^2 + a^2)A(t)\,\mathrm{sen}(\pi z)\,\mathrm{sen}(ax)\boldsymbol{j}; \end{aligned}$$

a divergência é

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\pi A\cos(\pi z)\,\mathrm{sen}(ax)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(Aa\,\mathrm{sen}(\pi z)\cos(ax)\right) \\ &= -\pi Aa\cos(\pi z)\cos(ax) + \pi Aa\cos(\pi z)\cos(ax) = 0 \;\blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [25] Resolva

$$\frac{dx}{dt} + 3x = \operatorname{sen}(3t), \qquad x(0) = 1$$

por qualquer método, <u>*exceto*</u> transformada de Laplace.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Por exemplo

$$\begin{aligned}
x = uv \;\Rightarrow\; u\frac{dv}{dt} + v\frac{du}{dt} + 3uv &= \operatorname{sen}(3t);\\
u\left[\frac{dv}{dt} + 3v\right] + v\frac{du}{dt} &= \operatorname{sen}(3t);\\
\frac{dv}{dt} &= -3v\\
\frac{dv}{v} &= -3dt\\
\ln|v| &= -3t + k_1\\
|v| &= d_1 e^{-3t}\\
v &= c_1 e^{-3t};\\
c_1 e^{-3t}\frac{du}{dt} &= \operatorname{sen}(3t);\\
\frac{du}{dt} &= \frac{1}{c_1} e^{3t}\operatorname{sen}(3t);\\
u(t) &= \frac{1}{6c_1} e^{3t}(\operatorname{sen}(3t) - \cos(3t)) + c_2;\\
x(t) = uv &= \left[\frac{1}{6c_1} e^{3t}(\operatorname{sen}(3t) - \cos(3t)) + c_2\right] c_1 e^{-3t}\\
&= \frac{1}{6}(\operatorname{sen}(3t) - \cos(3t)) + Ce^{-3t};\\
x(0) = 1 \Rightarrow 1 &= -\frac{1}{6} + C;\\
C &= 7/6 \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [30] Resolva

$$\frac{dx}{dt} + 3x = \text{sen}(3t), \qquad x(0) = 1$$

usando *obrigatoriamente* transformada de Laplace.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

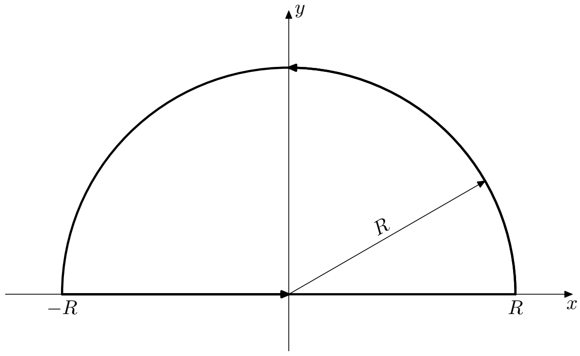
$$\begin{aligned}
s\overline{x}(s) - x(0) + 3\overline{x} &= \frac{3}{s^2+9} \\
\overline{x}(s+3) &= 1 + \frac{3}{s^2+9} \\
\overline{x} &= \frac{1}{s+3} + \frac{3}{(s^2+9)(s+3)} \\
&= \frac{1}{s+3} + \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{s^2+9} \\
&= \frac{1}{s+3} + \frac{1}{6}\frac{1}{(s+3)} - \frac{1}{6}\frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{6}\frac{3}{s^2+9} \\
&= \frac{7}{6}\frac{1}{(s+3)} + \frac{1}{6}\left[\frac{3}{s^2+9} - \frac{s}{s^2+9}\right] \Rightarrow \\
x(t) &= \frac{7}{6}e^{-3t} + \frac{1}{6}\left(\text{sen}(3t) - \cos(3t)\right) \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [20] Utilizando *obrigatoriamente* integração de contorno com variáveis complexas, calcule

$$I = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{1}{x^3+i}\,dx$$

onde x é o eixo dos reais e $i = \sqrt{-1}$. Utilize o contorno mostrado na figura com $R \to \infty$.

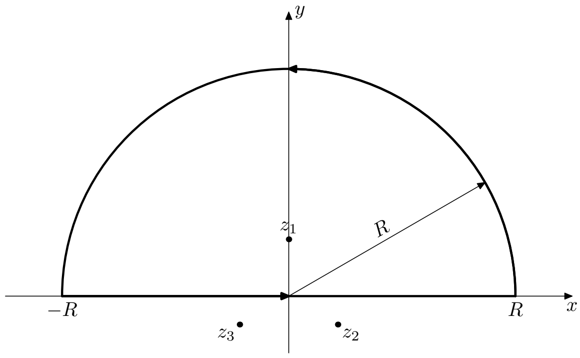


SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Considere a função $f(z) = 1/(z^3+i)$. Esta função possui singularidades em

$$\begin{aligned} z^3 + i &= 0,\\ z^3 &= -i = e^{(-i\pi/2+2k\pi)};\\ z &= e^{(-i\pi/6+2k\pi/3)}. \end{aligned}$$

Consequentemente, apenas a singularidade em $z_1 = i$ precisa ser considerada no Teorema dos Resíduos.



Para verificar a integral sobre o semi-círculo SC quando $R \to \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{R\to\infty} |I| = \lim_{R\to\infty} \left| \int_{SC} \frac{1}{z^3+i}\,dz \right| &\le \lim_{R\to\infty} \int_{SC} \left| \frac{1}{z^3+i}\,dz \right| \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \left| \frac{iRe^{i\theta}}{R^3e^{3i\theta}+i} \right| d\theta \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \left| \frac{iRe^{i\theta}}{R^3e^{3i\theta}} \right| d\theta = \lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{R^2} = 0. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema dos Resíduos, devemos ter

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{1}{x^3+i}\,dx = 2\pi i c_{-1},$$

onde o resíduo c_{-1} em z_1 é calculado como se segue:

$$\frac{1}{z^3+i} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)};$$

logo, nas proximidades de z_1,

$$f(z) \sim \frac{1}{(z-z_1)(z_1-z_2)(z_1-z_3)},$$

donde z_1 é claramente um pólo de primeira ordem, e

$$\begin{aligned} c_{-1} &= \frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)} \\ &= \frac{1}{(i-[\sqrt{3}/2-i/2])(i-[-\sqrt{3}/2-i/2])} \\ &= \frac{1}{(3i/2-\sqrt{3}/2)(3i/2+\sqrt{3}/2)} \\ &= \frac{1}{-9/4-3/4} = -\frac{1}{3}; \end{aligned}$$

Finalmente,

$$I = -\frac{2\pi i}{3} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹