TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental
UFPR
P01, 18 Set 2009
Prof. Nelson Luís Dias

GABARITO

0

---

1 [25] Fatos possivelmente úteis:

$$
\begin{aligned}
f_{Z|(x,y)}(z) &= \frac{f_{Z,X,Y}(z,x,y)}{f_{X,Y}(x,y)};\\
\int_0^\infty y e^{-ky}\,dy &= \frac{1}{k^2};\\
\delta(x) &= \delta(-x);\\
\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x/y-z)\,dx &= y\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x/y-z)\,d(x/y)\\
&= y\int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(y\xi)\delta(\xi-z)\,d(\xi)\\
&= yf(yz).
\end{aligned}
$$

Se X e Y são duas variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com f.d.p.

$$
f_X(x) = \frac{1}{b}e^{-x/b}, \qquad x \geq 0, \qquad f_Y(y) = \frac{1}{b}e^{-y/b}, \qquad y \geq 0,
$$

e $Z = X/Y$, obtenha a f.d.p. $f_Z(z)$. Cuidado com os limites de integração em x e y, que são variáveis maiores que ou iguais a zero. **Você pode ou não usar as sugestões acima; use-as se for mais fácil para você.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Seguindo minha sugestão:

$$
\begin{aligned}
f_{Z|(x,y)} &= \delta(z - \frac{x}{y}),\\
f_{Z,X,Y}(z,x,y) &= \delta(z-x/y)\frac{1}{b^2}e^{-x/b}e^{-y/b}.
\end{aligned}
$$

A marginal de Z é

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{y=0}^\infty \int_{x=0}^\infty \frac{1}{b^2}e^{x/b}e^{-y/b}\delta(z-x/y)\,dx\,dy\\
&= \int_{y=0}^\infty \frac{y}{b^2}e^{-y/b}\int_{\xi=0}^\infty e^{y\xi/b}\delta(z-\xi)\,d\xi\,dy\\
&= \int_{y=0}^\infty \frac{y}{b^2}e^{-y/b}e^{-zy/b}\,dy\\
&= \int_{y=0}^\infty \frac{y}{b^2}e^{-(1+z)y/b}\,dy = \frac{1}{(z+1)^2}\ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

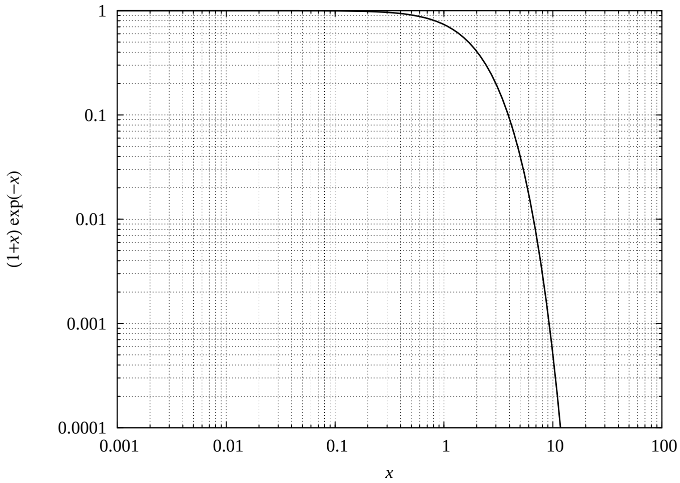
2 [25] Seja X uma variável aleatória com f.d.p.

$$f_X(x) = xe^{-x}, \qquad x \geq 0.$$

O gráfico da figura ao lado mostra a função $g(x) = (1+x)e^{-x}$. Com a ajuda do gráfico, obtenha o valor de x tal que

$$P\{X > x\} = 0{,}001.$$

A sua solução só vale se você calcular a f.d.a. de X.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A f.d.a. de X é

$$F_X(x) = \int_0^x \xi e^{-\xi}\, d\xi = 1 - (1+x)e^{-x}.$$

Desejamos

$$P\{X > x\} = 1 - F_X(x) = 1 - \left[1 - (1+x)e^{-x}\right] = (1+x)e^{-x} = 0{,}001.$$

Portanto, o que desejamos é exatamente o valor de x para o qual $g(x) = 0{,}001$. Lendo diretamente do gráfico,

$$x \approx 9.$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Se X é distribuído exponencialmente, $f_X(x) = \exp(-x/b)/b$, e $\langle X \rangle = b$, $\mathrm{Var}\{X\} = b^2$. Obtenha a distribuição de probabilidade de

$$Y = \frac{1}{\sqrt{93847534294}} \sum_{i=1}^{93847534294} X_i$$

onde todos os X_i's possuem a distribuição exponencial com parâmetro b acima, e são independentes entre si. Obviamente, em sua resposta você pode deixar indicadas quaisquer operações matemáticas envolvendo 93847534294.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Sob o fino véu do número monstruoso 93847534294, trata-se evidentemente de um caso de aplicação do Teorema Central do Limite. A distribuição de probabilidade de Y é *muito proximamente* a distribuição normal. Faltam os parâmetros. Seja $n = 93847534294$:

$$\begin{aligned}
\langle Y \rangle &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \langle X_i \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} n \langle X_i \rangle \\
&= \frac{nb}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} b = \sqrt{93847534294} b.
\end{aligned}$$

A variância é

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\{Y\} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\{X_i\} \\
&= \frac{1}{n} n b^2 \\
&= b^2.
\end{aligned}$$

Portanto, $Y \sim \mathrm{N}(\sqrt{93847534294} b, b^2)$.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] No país imaginário Neverlândia, o engenheiro ambiental M. Jackson projetou e construiu 100 grandes barragens, cada uma delas com uma probabilidade de falha do vertedor de 1/10000 em um ano qualquer. Considerando que os eventos "falha do vertedor" são independentes entre si:

a) [15] Calcule a probabilidade de pelo menos um dos 100 vertedores falhar em um ano qualquer.

b) [10] Faça a conta desta probabilidade até o fim (encontre um número; *não* deixe o resultado indicado) com o auxílio de

$$(1+x)^n \approx 1 + nx, \qquad x \ll 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Em Neverlândia: a probabilidade de cada uma dos vertedores *não* falhar em um ano qualquer é $p = 0{,}9999$. A probabilidade de nenhum falhar é $(0{,}9999)^{100}$. A probabilidade de pelo menos um vertedor falhar em um ano qualquer é

$$\begin{aligned} 1 - (0{,}9999)^{100} &= 1 - (1 - 0{,}0001)^{100} \\ &\approx 1 - (1 - 100 \times 0{,}0001) \\ &= 100 \times 10^{-4} = 0{,}01 = 1\% \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental
UFPR
P02, 30 Out 2009
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [25] Ache a série trigonométrica de Fourier (isto é: a série em senos e cossenos) de

$$
f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0, \\ x, & 0 \le x \le 1 \end{cases}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right], \\
A_n &= \frac{2}{L} \int_a^b f(\xi) \cos\left(\frac{2n\pi\xi}{L}\right) d\xi, \\
B_n &= \frac{2}{L} \int_a^b f(\xi) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi\xi}{L}\right) d\xi.
\end{aligned}
$$

Prosseguindo no cálculo dos coeficientes,

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \frac{2}{2} \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}, \\
A_n &= \int_0^1 \xi \cos\left(\frac{2n\pi\xi}{L}\right) d\xi = \frac{\cos(n\pi) - 1}{\pi^2 n^2}, \\
B_n &= \int_0^1 \xi \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi\xi}{L}\right) d\xi = -\frac{\cos(n\pi)}{\pi n} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 (2011-10-02T10:52:38 incluída em matappa.tex) [25] Se o produto interno entre duas funções complexas de uma variável real no intervalo fechado $[1, 2]$ for definido como

$$\langle f, g\rangle = \int_1^2 f^*(x)g(x)w(x)\,dx$$

com $w(x) = \ln x$, calcule $\left\langle x, x^2\right\rangle$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\left\langle x, x^2\right\rangle &= \int_1^2 x^3 \ln x\,dx \\
&= \int_1^2 \underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{x^3\,dx}_{dv} \\
&= \int_1^2 \left.\frac{x^4 \ln x}{4}\right|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^4}{4}\frac{1}{x}\,dx \\
&= \frac{16}{4}\ln 2 - \left.\frac{1}{16}x^4\right|_1^2 \\
&= 4\ln 2 - \frac{1}{16}[16-1] \\
&= 4\ln 2 - 15/16 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Por definição neste curso, um par de transformada/anti-transformada de Fourier é

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx, \qquad f(x) = \int_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{+ikx}\,dk.$$

a) [25] Seja

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Calcule $\widehat{f}(k)$.

b) [20] **BÔNUS! Este item não é obrigatório, mas se você o fizer sua nota pode chegar a 120!** Usando o resultado de a) e escrevendo $f(0)$ em função de $\widehat{f}(k)$, calcule

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} k}{k}\,dk = ?$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

O cálculo de $\widehat{f}(k)$ é quase imediato:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} e^{-ikx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi i k}\left[-e^{-ikx}\right]_{x=-1}^{x=+1} \\
&= \frac{1}{2\pi i k}\left[e^{ik} - e^{-ik}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi i k}[2i \operatorname{sen} k] \\
&= \frac{\operatorname{sen} k}{\pi k} \;\blacksquare
\end{aligned}$$

BÔNUS:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k}{\pi k} e^{ikx}\,dk \\
f(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k}{\pi k}\,dk \\
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k}{\pi k}\,dk \\
1 &= 2\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k}{\pi k}\,dk \qquad \text{(pois o integrando é uma função par)} \\
\frac{\pi}{2} &= \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k}{k}\,dk \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Calcule a função de Green $G(\xi, x)$ da equação diferencial

$$(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + 6xy = 2x.$$

SUGESTÃO: Divida a equação por $(1+x^2)$, e troque o nome de x para ξ antes de multiplicar por G e integrar por partes...

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{d\xi} + \frac{6\xi}{1+\xi^2}y &= \frac{2\xi}{1+\xi^2} \\
G(\xi,x)\frac{dy}{d\xi} + G(\xi,x)\frac{6\xi}{1+\xi^2}y &= G(\xi,x)\frac{2\xi}{1+\xi^2} \\
\int_0^\infty G(\xi,x)\frac{dy}{d\xi}\,d\xi + \int_0^\infty G(\xi,x)\frac{6\xi}{1+\xi^2}y(\xi)\,d\xi &= \int_0^\infty G(\xi,x)\frac{2\xi}{1+\xi^2}\,d\xi \\
G(\xi,x)y(x)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty y(\xi)\frac{dG(\xi,x)}{d\xi}\,d\xi + \int_0^\infty G(\xi,x)\frac{6\xi}{1+\xi^2}y(\xi)\,d\xi &= \int_0^\infty G(\xi,x)\frac{2\xi}{1+\xi^2}\,d\xi
\end{aligned}$$

Neste ponto, imponho $G(\infty, x) = 0$. Continuo:

$$\int_0^\infty y(\xi)\left[-\frac{dG(\xi,x)}{d\xi}\,d\xi + G(\xi,x)\frac{6\xi}{1+\xi^2}\right]d\xi = G(x,0)y(0) + \int_0^\infty G(\xi,x)\frac{2\xi}{1+\xi^2}\,d\xi$$

Para tornar o lado direito igual a $y(x)$:

$$-\frac{dG(\xi,x)}{d\xi}\,d\xi + G(\xi,x)\frac{6\xi}{1+\xi^2} = \delta(\xi - x).$$

Procuro a solução da equação diferencial ordinária homogênea associada:

$$\begin{aligned}
-\frac{dh}{d\xi}\,d\xi + h\frac{6\xi}{1+\xi^2} &= 0, \\
\frac{dh}{d\xi} &= h\frac{6\xi}{1+\xi^2} \\
\frac{dh}{h} &= \frac{3\times 2\xi\,d\xi}{1+\xi^2} \\
\int_{h_0}^h \frac{dv}{v} &= 3\times\int_0^\xi \frac{2u\,du}{1+u^2} \\
\ln\frac{h}{h_0} &= 3\times\ln\frac{1+\xi^2}{1} = \ln(1+\xi^2)^3 \\
h &= h_0(1+\xi^2)^3.
\end{aligned}$$

Procuro agora uma solução para G com o método de variação de parâmetros:

$$\begin{aligned}
G(\xi,x) &= A(\xi,x)(1+\xi^2)^3, \\
\frac{dG}{d\xi} &= \frac{dA}{d\xi}(1+\xi^2)^3 + A\times 6\xi(1+\xi^2)^2.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Substituindo na equação diferencial,

$$
\begin{aligned}
-\frac{dA}{d\xi} &= \frac{1}{(1+\xi^2)^3}\delta(\xi - x),\\
\frac{dA}{du} &= -\frac{1}{(1+u^2)^3}\delta(u - x),\\
A(\xi,x) - A(0,x) &= -\int_0^\xi \frac{1}{(1+u^2)^3}\delta(u-x)\,du\\
A(\xi,x) &= A(0,x) - \frac{H(\xi - x)}{(1+x^2)^3},\\
G(\xi,x) &= \left[A(0,x) - \frac{H(\xi-x)}{(1+x^2)^3}\right](1+\xi^2)^3\\
G(\infty,x) = 0 \Rightarrow A(0,x) &= \frac{1}{(1+x^2)^3},\\
G(\xi,x) &= [1 - H(\xi - x)]\,\frac{(1+\xi^2)^3}{(1+x^2)^3} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental
UFPR
P03, 02 Dez 2009
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

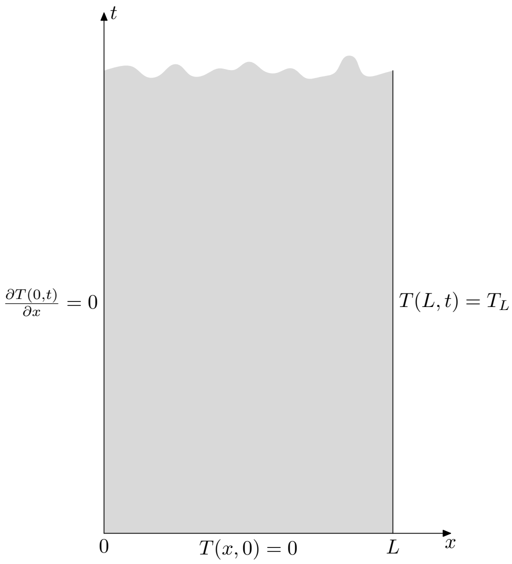
---

1 [50] Para as condições inicial e de contorno da figura abaixo, resolva a equação

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Atenção: a condição em $x = L$ é <u>não-homogênea</u>.
Sugestão: para obter condições de contorno homogêneas, subtraia de $T(x,t)$ a solução para o regime permanente.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:



A equação para regime permanente é:

$$\begin{aligned}
u(x) &= \lim_{t\to\infty} T(x,t);\\
\frac{d^2u}{dx^2} &= 0;\\
u(x) &= Ax + B.
\end{aligned}$$

Esta solução precisa atender às condições de contorno:

$$\begin{aligned}
\frac{du(0)}{dx} = 0 \;&\Rightarrow\; A = 0;\\
u(L) = T_L \;&\Rightarrow\; B = T_L;
\end{aligned}$$

donde

$$u(x) = T_L.$$

Faça

$$\begin{aligned}
\phi(x,t) &= T(x,t) - u(x) \;\Rightarrow\\
\frac{\partial \phi}{\partial x}(0,t) &= \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) - \frac{du}{dx}(0)\\
&= 0 - 0 = 0;\\
\phi(L,t) &= T(L,t) - u(L)\\
&= T_L - T_L = 0;\\
\phi(x,0) &= T(x,0) - u(x)\\
&= 0 - T_L = -T_L.
\end{aligned}$$

As condições de contorno em $\phi(x,t)$ são agora homogêneas; Faça

$$\begin{aligned}
\phi(x,t) &= X(x)\mathcal{T}(T)\\
X\mathcal{T}' &= \alpha^2 X''\mathcal{T}\\
\frac{X''}{X} &= \frac{1}{\alpha^2}\frac{\mathcal{T}'}{\mathcal{T}} = \lambda.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

A única equação de ordem 2 é em x: não há dúvidas sobre o problema de Sturm-Liouville a ser atacado:

$$X'' - \lambda X = 0$$

$$\begin{aligned}
&\lambda > 0 : \\
&\quad X(x) = A\cosh(\sqrt{\lambda}x) + B\,\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}x) \\
&\quad X'(0) = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{\lambda}\,[A\,\mathrm{senh}(0) + B\cosh(0)] = 0 \;\Rightarrow\; B = 0. \\
&\quad X(L) = 0 \;\Rightarrow\; A\cosh(\sqrt{\lambda}L) = 0 \;\Rightarrow A = 0.
\end{aligned}$$

A única solução possível é $X = 0$, que é trivial e portanto não serve.

$$\begin{aligned}
&\lambda = 0 : \\
&\quad X(x) = Ax + B \\
&\quad X'(0) = 0 \;\Rightarrow\; A = 0; \\
&\quad X(L) = 0 \;\Rightarrow B = 0.
\end{aligned}$$

A única solução possível é $X = 0$, que é trivial e portanto não serve.

$$\begin{aligned}
&\lambda < 0 : \\
&\quad X(x) = A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{-\lambda}x) \\
&\quad X'(0) = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{-\lambda}\,[-A\sin(0) + B\cos(0)] = 0 \;\Rightarrow\; B = 0. \\
&\quad X(L) = 0 \;\Rightarrow\; A\cos(\sqrt{-\lambda}L) = 0 \\
&\sqrt{-\lambda}L = \pi/2 + n\pi,\; n = 0, 1, 2, \ldots \\
&\quad -\lambda = (1/2+n)^2\pi^2/L^2, \\
&X_n(x) = \cos((1/2+n)\pi x/L).
\end{aligned}$$

De posse dos autovalores, obtemos $\mathcal{T}$:

$$\frac{\mathcal{T}'}{\mathcal{T}} = -\alpha^2(1/2+n)^2\pi^2/L^2$$

$$\mathcal{T}(t) = \exp\left(-\frac{\alpha^2(1/2+n)^2\pi^2}{L^2}t\right).$$

A solução em série para ϕ é

$$\phi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp\left(-\frac{\alpha^2(1/2+n)^2\pi^2}{L^2}t\right)\cos\left(\frac{(1/2+n)\pi x}{L}\right).$$

Resta obter os A_n's:

$$\begin{aligned}
\phi(x,0) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{(1/2+n)\pi x}{L}\right), \\
-T_L &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{(1/2+n)\pi x}{L}\right), \\
-\int_0^L T_L \cos\left(\frac{(1/2+m)\pi x}{L}\right) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^L \cos\left(\frac{(1/2+n)\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{(1/2+m)\pi x}{L}\right) dx \\
-\int_0^L T_L \cos\left(\frac{(1/2+m)\pi x}{L}\right) dx &= A_m\frac{L}{2}, \\
-T_L\frac{2Lcos(m\pi)}{2m\pi+\pi} &= A_m\frac{L}{2}, \\
A_m &= \frac{-4T_L\cos(m\pi)}{2m\pi+\pi} \;\blacksquare
\end{aligned}$$

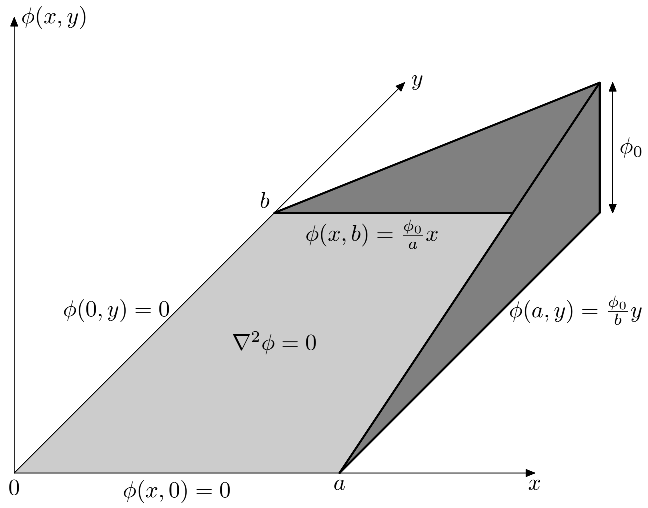
Continue a solução no verso ⟹

2 [50] Para a região retangular $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ da figura abaixo, resolva a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

para as condições de contorno indicadas.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:



Decomponho o problema em

$$\phi = U + V,$$
$$\nabla^2\phi = \nabla^2 U + \nabla^2 V,$$

com condições de contorno

$$\begin{aligned} U(x,0) &= 0 & V(x,0) &= 0 \\ U(0,y) &= 0 & V(0,y) &= 0 \\ U(a,y) &= \phi_0\frac{y}{b} & V(a,y) &= 0, \\ U(x,b) &= 0 & V(x,b) &= \phi_0\frac{x}{a}. \end{aligned}$$

Vemos duas coisas:

1. As condições de contorno de U em y são homogêneas; as condições de contorno de V em x são homogêneas.
2. Os problemas em U e V são *o mesmo* problema, se trocarmos x por y, e a por b.

Basta portanto resolver um deles. Resolvendo para U:

$$\begin{aligned} U(x,y) &= X(x)Y(y), \\ X''Y + XY'' &= 0, \\ \frac{Y''}{Y} &= -\frac{X''}{X} = \lambda. \end{aligned}$$

O problema de Sturm-Liouville é obviamente em Y:

$$Y'' - \lambda Y = 0$$

$$\begin{aligned} &\lambda > 0 : \\ &\quad Y(y) = A\cosh(\sqrt{\lambda}y) + B\,\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}y) \\ &\quad Y(0) = 0 \Rightarrow [A\cosh(0) + B\,\mathrm{senh}(0)] = 0 \Rightarrow A = 0. \\ &\quad Y(b) = 0 \Rightarrow B\,\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}b) = 0 \Rightarrow B = 0. \end{aligned}$$

A única solução possível é $Y = 0$, que é trivial e portanto não serve.

$$\begin{aligned} &\lambda = 0 : \\ &\quad Y(y) = Ay + B \\ &\quad Y(0) = 0 \Rightarrow B = 0; \\ &\quad Y(b) = 0 \Rightarrow A = 0. \end{aligned}$$

A única solução possível é $Y = 0$, que é trivial e portanto não serve.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
&\lambda < 0: \\
&\quad Y(y) = A\cos(\sqrt{-\lambda}y) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{-\lambda}y) \\
&\quad Y(0) = 0 \;\Rightarrow\; [A\cos(0) + B\,\mathrm{sen}(0)] = 0 \;\Rightarrow\; A = 0. \\
&\quad Y(b) = 0 \;\Rightarrow\; B\,\mathrm{sen}(\sqrt{-\lambda}b) = 0 \\
&\sqrt{-\lambda}b = n\pi \\
&\quad -\lambda = n^2\pi^2/b^2, \\
&\quad Y_n(y) = \mathrm{sen}(n\pi y/b).
\end{aligned}
$$

Em X o problema fica

$$
\begin{aligned}
\frac{X''}{X} &= -\lambda_n = n^2\pi^2/b^2 \\
X'' - n^2\pi^2/b^2 X &= 0 \\
X(x) &= A_n\cosh(n\pi x/b) + B_n\,\mathrm{senh}(n\pi x/b)
\end{aligned}
$$

Em particular $U(0,y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow A_n = 0$; então

$$
U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\,\mathrm{sen}(n\pi y/b)\,\mathrm{senh}(n\pi x/b).
$$

Resta obter B_n:

$$
\begin{aligned}
U(a,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n\,\mathrm{sen}(n\pi y/b)\,\mathrm{senh}(n\pi a/b) \\
\phi_0\frac{y}{b} &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n\,\mathrm{sen}(n\pi y/b)\,\mathrm{senh}(n\pi a/b) \\
\phi_0\int_0^b \frac{y}{b}\,\mathrm{sen}(m\pi y/b)\,dy &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n\,\mathrm{senh}(n\pi a/b)\int_0^b \mathrm{sen}(n\pi y/b)\,\mathrm{sen}(m\pi y/b)\,dy \\
\phi_0\int_0^b \frac{y}{b}\,\mathrm{sen}(m\pi y/b)\,dy &= B_m\,\mathrm{senh}(n\pi a/b)\frac{b}{2} \\
\phi_0\frac{b(-1)^{m+1}}{\pi m} &= B_m\,\mathrm{senh}(n\pi a/b)\frac{b}{2} \\
B_m &= \frac{2\phi_0(-1)^{m+1}}{\pi m\,\mathrm{senh}(m\pi a/b)}.
\end{aligned}
$$

Pela simetria das condições de contorno, as soluções em U e V são:

$$
\begin{aligned}
U(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\phi_0(-1)^{n+1}}{\pi n\,\mathrm{senh}(n\pi a/b)}\,\mathrm{sen}(n\pi y/b)\,\mathrm{senh}(n\pi x/b), \\
V(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\phi_0(-1)^{n+1}}{\pi n\,\mathrm{senh}(n\pi b/a)}\,\mathrm{sen}(n\pi x/a)\,\mathrm{senh}(n\pi y/a) \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 — Bônus Natalino: questão não-obrigatória valendo pontos adicionais. [20] Durante 364 dias por ano, enquanto os gnomos fabricam os presentes de Natal, Papai Noel não tem muito o que fazer: seu *hobby* é resolver equações diferenciais. Este ano, Papai Noel resolveu a equação diferencial

$$\frac{\partial \psi}{\partial \kappa} + \alpha\kappa^{-5/3}\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\left[\frac{5}{3}\kappa^{-1} + 2\alpha\kappa^{1/3}\right]\psi; \qquad \psi(\kappa, 0) = f(\kappa)$$

(onde α é uma constante, e $f(\kappa)$ é uma condição inicial conhecida), transformando o lado esquerdo na derivada total $d\psi/d\kappa$, identificando as linhas características, e integrando. Obtenha a solução de Papai Noel para $\psi(\kappa, \tau)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Este é obviamente um problema para ser resolvido pelo método das características; compare:

$$\begin{aligned}
-\left[\frac{5}{3}\kappa^{-1} + 2\alpha\kappa^{1/3}\right]\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial \kappa} + \alpha\kappa^{-5/3}\frac{\partial \psi}{\partial \tau},\\
\frac{d\psi}{d\kappa} &= \frac{\partial \psi}{\partial \kappa} + \frac{d\tau}{d\kappa}\frac{\partial \psi}{\partial \tau}.
\end{aligned}$$

A equação característica é

$$\begin{aligned}
\frac{d\tau}{d\kappa} &= \alpha\kappa^{-5/3},\\
d\tau &= \alpha\kappa^{-5/3}\,d\kappa,\\
\int_0^\tau dt &= \alpha\int_\chi^\kappa k^{-5/3}\,dk.
\end{aligned}$$

Note que na notação utilizada χ é a configuração de κ em $\tau = 0$; integrando:

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{3\alpha}{2}\left[\chi^{-2/3} - \kappa^{-2/3}\right],\\
\frac{2\tau}{3\alpha} &= \chi^{-2/3} - \kappa^{-2/3},\\
\chi^{-2/3} &= \frac{2\tau}{3\alpha} + \kappa^{-2/3},\\
\chi(\kappa, \tau) &= \left[\frac{2\tau}{3\alpha} + \kappa^{-2/3}\right]^{-3/2}.
\end{aligned}$$

De fato: $\tau = 0 \Rightarrow \chi = \kappa$. Agora integramos em κ:

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi}{d\kappa} &= -\left[\frac{5}{3}\kappa^{-1} + 2\alpha\kappa^{1/3}\right]\psi,\\
\frac{d\psi}{\psi} &= -\left[\frac{5}{3}\kappa^{-1} + 2\alpha\kappa^{1/3}\right]d\kappa,\\
\int_{f(\chi)}^{\psi(\kappa,\tau)} \frac{du}{u} &= -\int_\chi^\kappa \left[\frac{5}{3}k^{-1} + 2\alpha k^{1/3}\right]dk,\\
\ln\frac{\psi(\kappa,\tau)}{f(\chi)} &= -\frac{5}{3}\int_\chi^\kappa \frac{dk}{k} - 2\int_\chi^\kappa k^{1/3}\,dk,\\
\ln\frac{\psi(\kappa,\tau)}{f(\chi)} &= -\frac{5}{3}\ln\frac{\kappa}{\chi} - \frac{3}{2}\left[\kappa^{4/3} - \chi^{4/3}\right],\\
\psi(\kappa,\tau) &= f(\chi)\left(\frac{\kappa}{\chi}\right)^{-5/3}\exp\left[-\frac{3}{2}\left(\kappa^{4/3} - \chi^{4/3}\right)\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental
UFPR
P04, 09 Dez 2009
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [25] Considere a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -kx; \qquad \phi(0,t) = \phi(L,t) = 0; \qquad \phi(x,0) = 0,\ \frac{\partial}{\partial t}\phi(x,0) = 0.$$

Obtenha uma solução da forma

$$\phi(x,t) = \psi(x,t) + u(x),$$

onde ψ é uma solução da equação de onda homogênea (**sem o termo** $-kx$), e $u(x)$ é uma solução de regime permanente, que não depende de t.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A solução $u(x)$, independente do tempo, deve atender a

$$\frac{d^2u}{dx^2} + kx = 0, \qquad u(0) = u(L) = 0.$$

A solução é

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= -\frac{kx^2}{2} + A,\\
u(x) &= -\frac{kx^3}{6} + Ax + B
\end{aligned}$$

A CC $u(0) = 0$ leva a $B = 0$; a CC $u(L) = 0$ leva a

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{kL^3}{6} + AL,\\
A &= \frac{kL^2}{6},\\
u(x) &= \frac{k}{6}\left[x(L^2 - x^2)\right].
\end{aligned}$$

Como fica o problema em ψ?

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2[\psi + u]}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2[\psi + u]}{\partial t^2} + kx &= 0,\\
\underbrace{\left[\frac{d^2u}{dx^2} + kx\right]}_{=0} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} &= 0.
\end{aligned}$$

Restou, portanto, a equação clássica da onda em uma dimensão. As condições de contorno e iniciais em ψ são:

$$\begin{aligned}
0 = \phi(0,t) = \psi(0,t) + u(0) \qquad &\Rightarrow \qquad \psi(0,t) = 0,\\
0 = \phi(L,t) = \psi(0,t) + u(L) \qquad &\Rightarrow \qquad \psi(L,t) = 0,\\
0 = \psi(x,0) + \frac{k}{6}\left[x(L^2 - x^2)\right] \qquad &\Rightarrow \qquad \psi(x,0) = -\frac{k}{6}\left[x(L^2 - x^2)\right],\\
0 = \frac{\partial}{\partial t}\phi(x,0) = \frac{\partial}{\partial t}[\psi(x,0) + u(x)] \qquad &\Rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,0) = 0.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Este portanto é um problema de valor de contorno e inicial (a equação da onda) perfeitamente bem especificado. Separando as variáveis em ψ:

$$
\begin{aligned}
X''T &= \frac{1}{c^2}XT'' \\
\frac{X''}{X} &= \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \lambda
\end{aligned}
$$

Existe agora um problema de Sturm-Liouville em x clássico, e após a usual discussão de sinais obtém-se

$$
\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \qquad X_n(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}.
$$

As soluções para ψ, portanto, deverão ser do tipo

$$
\begin{aligned}
\psi(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\frac{n\pi ct}{L} + B_n\operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{L}\right]\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \\
\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) &= \frac{n\pi c}{L}\left[-A_n\operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{L} + B_n\cos\frac{n\pi ct}{L}\right]\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}
\end{aligned}
$$

Agora,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,0) &= 0 \Rightarrow B_n = 0, \\
\psi(x,0) &= -\frac{k}{6}\left[x(L^2-x^2)\right], \\
-\frac{k}{6}\left[x(L^2-x^2)\right] &= \sum_{n=1}^{\infty}A_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \Rightarrow \\
-\int_0^L\frac{k}{6}\left[x(L^2-x^2)\right]\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\,dx &= A_m\frac{L}{2},
\end{aligned}
$$

A integral desta solução foi calculada por MAXIMA com

```
declare( [m], integer) ;
assume ( m > 0 ) ;
assume ( L > 0 ) ;
f : - (k/6)* x * (L^2 -x^2) * sin(m*%pi*x/L) ;
(2/L)*integrate(f,x,0,L) ;
```

cujo resultado é

$$
A_m = \frac{2k(-1)^m L^3}{m^3\pi^3}.
$$

A solução completa portanto é

$$
\phi(x,t) = \frac{k}{6}x(L^2-x^2) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2k(-1)^n L^3}{n^3\pi^3}\cos\frac{n\pi ct}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \blacksquare
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [25] Considere a seguinte variação do "problema de Sutton":

$$U\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left[K\frac{\partial Q}{\partial z}\right]; \qquad Q(0,z) = 0,\ Q(x,0) = Q_0,\ Q(x,\infty) = 0.$$

Suponha que U e K variam com z segundo

$$\frac{U}{u_*} = C\left(\frac{z}{z_0}\right)^m, \qquad K = \frac{u_*}{mC}z^{1-m}z_0^m.$$

Nas equações acima, m e C são adimensionais; $[\![u_*]\!] = [\![U]\!] = \mathbb{L}\mathbb{T}^{-1}$; $[\![x]\!] = [\![z]\!] = [\![z_0]\!] = \mathbb{L}$ e $[\![K]\!] = \mathbb{L}^2\mathbb{T}^{-1}$. Usando a variável de similaridade

$$\xi = C^2\left(\frac{z}{z_0}\right)^{2m}\frac{z}{x},$$

obtenha uma equação diferencial **ordinária** na variável independente ξ, e as condições de contorno que ela deve atender. **Não é necessário resolver a equação**.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Trata-se de um exercício de aplicação sistemática da regra da cadeia.

$$\begin{aligned}
\xi &= \left[C^2 z_0^{-2m}\right] z^{2m+1}x^{-1};\\
\frac{\partial \xi}{\partial x} &= -\left[C^2 z_0^{-2m}\right] z^{2m+1}x^{-2};\\
\frac{\partial \xi}{\partial z} &= (2m+1)\left[C^2 z_0^{-2m}\right] x^{-1}z^{2m}.
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
U\frac{\partial Q}{\partial x} &= U\frac{dQ}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}\\
&= -U\left[C^2 z_0^{-2m}\right] z^{2m+1}x^{-2}\frac{dQ}{d\xi}\\
&= -Cu_*\left(\frac{z}{z_0}\right)^m\left[C^2 z_0^{-2m}\right] z^{2m+1}x^{-2}\frac{dQ}{d\xi}\\
&= -C^3u_*z_0^{-3m}z^{3m+1}x^{-2}\frac{dQ}{d\xi};\\
K\frac{\partial Q}{\partial z} &= \frac{u_*}{mC}z_0^m z^{1-m}\frac{dQ}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial z}\\
&= \frac{u_*}{mC}z_0^m z^{1-m}(2m+1)\left[C^2 z_0^{-2m}\right] x^{-1}z^{2m}\frac{dQ}{d\xi}\\
&= u_*Cz_0^{-m}\frac{2m+1}{m}z^{m+1}x^{-1}\frac{dQ}{d\xi};\\
\frac{\partial}{\partial z}K\frac{\partial Q}{\partial z} &= u_*Cz_0^{-m}\frac{(2m+1)(m+1)}{m}x^{-1}z^m\frac{dQ}{d\xi} + u_*Cz_0^{-m}\frac{2m+1}{m}z^{m+1}x^{-1}\frac{d^2Q}{d\xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial z}\\
&= u_*Cz_0^{-m}\frac{(2m+1)(m+1)}{m}x^{-1}z^m\frac{dQ}{d\xi} + u_*C^3z_0^{-3m}\frac{(2m+1)^2}{m}z^{3m+1}x^{-2}\frac{d^2Q}{d\xi^2}
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Reunindo todos os termos na equação diferencial original:

$$
\begin{aligned}
-U\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}K\frac{\partial Q}{\partial z}&=0;\\
C^3u_*z_0^{-3m}z^{3m+1}x^{-2}\frac{dQ}{d\xi}+u_*Cz_0^{-m}\frac{(2m+1)(m+1)}{m}x^{-1}z^m\frac{dQ}{d\xi}+u_*C^3z_0^{-3m}\frac{(2m+1)^2}{m}z^{3m+1}x^{-2}\frac{d^2Q}{d\xi^2}&=0;\\
C^3z_0^{-3m}z^{3m+1}x^{-2}\frac{dQ}{d\xi}+Cz_0^{-m}\frac{(2m+1)(m+1)}{m}x^{-1}z^m\frac{dQ}{d\xi}+C^3z_0^{-3m}\frac{(2m+1)^2}{m}z^{3m+1}x^{-2}\frac{d^2Q}{d\xi^2}&=0;\\
C^3z_0^{-3m}z^{3m+1}x^{-1}\frac{dQ}{d\xi}+Cz_0^{-m}\frac{(2m+1)(m+1)}{m}z^m\frac{dQ}{d\xi}+C^3z_0^{-3m}\frac{(2m+1)^2}{m}z^{3m+1}x^{-1}\frac{d^2Q}{d\xi^2}&=0;\\
C^3z_0^{-2m}z^{3m+1}x^{-1}\frac{dQ}{d\xi}+C\frac{(2m+1)(m+1)}{m}z^m\frac{dQ}{d\xi}+C^3z_0^{-2m}\frac{(2m+1)^2}{m}z^{3m+1}x^{-1}\frac{d^2Q}{d\xi^2}&=0;\\
C^2z_0^{-2m}z^{3m+1}x^{-1}\frac{dQ}{d\xi}+\frac{(2m+1)(m+1)}{m}z^m\frac{dQ}{d\xi}+C^2z_0^{-2m}\frac{(2m+1)^2}{m}z^{3m+1}x^{-1}\frac{d^2Q}{d\xi^2}&=0;\\
C^2z_0^{-2m}z^{2m+1}x^{-1}\frac{dQ}{d\xi}+\frac{(2m+1)(m+1)}{m}\frac{dQ}{d\xi}+C^2z_0^{-2m}\frac{(2m+1)^2}{m}z^{2m+1}x^{-1}\frac{d^2Q}{d\xi^2}&=0;\\
\xi\frac{dQ}{d\xi}+\frac{(2m+1)(m+1)}{m}\frac{dQ}{d\xi}+\frac{(2m+1)^2}{m}\xi\frac{d^2Q}{d\xi^2}&=0.
\end{aligned}
$$

Nada mais é estritamente necessário, mas fazendo ainda

$$
\chi=\frac{Q}{Q_0}
$$

e multiplicando por m:

$$
(2m+1)^2\xi\frac{d^2\chi}{d\xi^2}+[(2m+1)(m+1)+m\xi]\frac{d\chi}{d\xi}=0.
$$

Note ainda que:

$$
\begin{aligned}
x\to 0 &\Rightarrow \xi\to\infty;\\
z\to\infty &\Rightarrow \xi\to\infty;\\
z\to 0 &\Rightarrow \xi\to 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, as condições de contorno em $\chi(\xi)$ são

$$
\begin{aligned}
\chi(0)&=1,\\
\chi(\infty)&=0\ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Se Y é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$f_Y(y) = \frac{k}{u}\left(\frac{u}{y}\right)^{k+1} e^{-\left(\frac{u}{y}\right)^k}, \qquad y \geq 0,$$

onde k e u são parâmetros, obtenha $\mathrm{E}\{Y\}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\{Y\} &= k\int_0^\infty \left(\frac{u}{y}\right)^k e^{-\left(\frac{u}{y}\right)^k}\,dy;\\
t &= \left(\frac{u}{y}\right)^k \ \Rightarrow\\
\frac{u}{y} &= t^{1/k} \ \Rightarrow\\
dy &= u\left[-\frac{1}{k}t^{-\frac{1}{k}-1}\right]dt \ \Rightarrow\\
\mathrm{E}\{Y\} &= \int_\infty^0 tu\left[-\left(t^{-\frac{1}{k}-1}\right)\right]e^{-t}\,dt\\
&= u\int_0^\infty t^{-1/k}e^{-t}\,dt.
\end{aligned}$$

Sabendo que

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt,$$

faço $-1/k = x-1$ e concluo que

$$\mathrm{E}\{Y\} = u\Gamma(1-1/k) \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

4 2011-10-02T10:52:05 Incluída em matappa.tex [25] Considere uma base $E = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ **não necessariamente ortonormal** de um espaço vetorial genérico $\mathbb{V}$. Um vetor $\boldsymbol{x}$ qualquer de $\mathbb{V}$ é $\boldsymbol{x} = \sum_i x_i \boldsymbol{e}_i$. A representação matricial de $\boldsymbol{x}$ é $[x] = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$, onde $[\cdot]^T$ indica a matriz transposta. A notação $\langle\, , \rangle$ indica o produto interno.

a) [10] Se $\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle = M_{i,j}$, mostre que $M_{i,j} = M^*_{j,i}$.

b) [15] Exprima $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ matricialmente, em função de $[x]$, $[y]$ e de $[M]$, onde $[M]$ é a matriz cujos elementos são os $M_{i,j}$'s definidos acima.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) De fato,

$$M_{i,j} = \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle = [\langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i \rangle]^* = M^*_{j,i}.$$

b)

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &= \left\langle \sum_i x_i \boldsymbol{e}_i, \sum_j y_j \boldsymbol{e}_j \right\rangle \\
&= \sum_j \left\langle \sum_i x_i \boldsymbol{e}_i, y_j \boldsymbol{e}_j \right\rangle \\
&= \sum_j y_j \left\langle \sum_i x_i \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \right\rangle \\
&= \sum_j y_j \left\langle \boldsymbol{e}_j, \sum_i x_i \boldsymbol{e}_i \right\rangle^* \\
&= \sum_j y_j \sum_i \langle \boldsymbol{e}_j, x_i \boldsymbol{e}_i \rangle^* \\
&= \sum_j y_j \sum_i x_i^* \langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i \rangle^* \\
&= \sum_j y_j \sum_i x_i^* \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle \\
&= \sum_i \sum_j x_i^* \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle y_j \\
&= \sum_i \sum_j x_i^* M_{i,j} y_j \\
&= [x^*]^T [M][y] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental
UFPR
F, 14 Dez 2009
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [30] Se $f(x)$ é a fdp de uma distribuição de probabilidade, a *função geradora de momentos de f* é uma transformada integral, definida por

$$G(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ux}\, dx.$$

Mostre que

$$\left.\frac{dG}{du}\right|_{u=0} = \langle X \rangle .$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\frac{dG}{du} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) e^{ux}\, dx;$$

$$\left.\frac{dG}{du}\right|_{u=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx \equiv \langle X \rangle \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [30] Calcule a transformada de Fourier de $f(x) = e^{-|x|}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\, e^{-ikx}\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{x}\, e^{-ikx}\, dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x} e^{-ikx}\, dx\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{(1-ik)x}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(1+ik)x}\, dx\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\left.\frac{\exp((1-ik)x)}{(1-ik)}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{-\exp((1+ix)x)}{(1+ik)}\right|_{0}^{\infty}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{(1-ik)} + \frac{1}{(1+ik)}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+k^2} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [40] Lembre-se da prova da semana passada, e resolva completamente o problema

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = -kx, \qquad \phi(0,t) = \phi(L,t) = 0, \qquad \phi(x,0) = 0,$$

fazendo $\phi(x,t) = \psi(x,t) + u(x)$ e obrigando $u(x)$ a respeitar as condições de contorno.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A solução $u(x)$, independente do tempo, deve atender a

$$\frac{d^2u}{dx^2} + kx = 0, \qquad u(0) = u(L) = 0.$$

A solução é

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= -\frac{kx^2}{2} + A,\\ u(x) &= -\frac{kx^3}{6} + Ax + B\end{aligned}$$

A CC $u(0) = 0$ leva a $B = 0$; a CC $u(L) = 0$ leva a

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{kL^3}{6} + AL,\\ A &= \frac{kL^2}{6},\\ u(x) &= \frac{k}{6}\left[x(L^2 - x^2)\right].\end{aligned}$$

Como fica o problema em ψ?

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2[\psi+u]}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial[\psi+u]}{\partial t} + kx = 0,\\ \underbrace{[\frac{d^2u}{dx^2} + kx]}_{=0} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0.\end{aligned}$$

Restou, portanto, a equação clássica da difusão. As condições de contorno e iniciais em ψ são:

$$\begin{array}{lcl} 0 = \phi(0,t) = \psi(0,t) + u(0) & \Rightarrow & \psi(0,t) = 0,\\ 0 = \phi(L,t) = \psi(0,t) + u(L) & \Rightarrow & \psi(L,t) = 0,\\ 0 = \psi(x,0) + \frac{k}{6}\left[x(L^2-x^2)\right] & \Rightarrow & \psi(x,0) = -\frac{k}{6}\left[x(L^2-x^2)\right].\end{array}$$

Este portanto é um problema de valor de contorno e inicial (a equação da onda) perfeitamente bem especificado. Separando as variáveis em ψ:

$$\begin{aligned}X''T &= \frac{1}{\alpha^2}XT'\\ \frac{X''}{X} &= \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = \lambda\end{aligned}$$

Existe agora um problema de Sturm-Liouville em x clássico, e após a usual discussão de sinais obtém-se

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \qquad X_n(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}.$$

As soluções para ψ, portanto, deverão ser do tipo

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2\alpha^2 t}{L^2}\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

Agora,

$$\begin{aligned}\psi(x,0) &= -\frac{k}{6}\left[x(L^2-x^2)\right],\\ -\frac{k}{6}\left[x(L^2-x^2)\right] &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \Rightarrow\\ -\int_0^L \frac{k}{6}\left[x(L^2-x^2)\right]\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\,dx &= A_m\frac{L}{2},\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

A integral desta solução foi calculada por MAXIMA com

```
declare( [m], integer) ;
assume ( m > 0 ) ;
assume ( L > 0 ) ;
f : - (k/6)* x * (L^2 -x^2) * sin(m*%pi*x/L) ;
(2/L)*integrate(f,x,0,L) ;
```

cujo resultado é

$$A_m = \frac{2k(-1)^m L^3}{m^3\pi^3}.$$

A solução completa portanto é

$$\phi(x,t) = \frac{k}{6}x(L^2 - x^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k(-1)^n L^3}{n^3\pi^3} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2\alpha^2 t}{L^2}\right) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$