TT009 Matemática Aplicada I
P01, 14 Mar 2006
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: GABARITO

0

Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e LEMBRE-SE: COMECE PELAS MAIS FÁCEIS PARA VOCÊ. PROCURE RESOLVER O MAIOR NÚMERO DE ITENS POSSÍVEL, PARA MAXIMIZAR SUA NOTA. MANTENHA-SE CALMA(O), E PENSE UM POUCO EM QUAL SERÁ A SUA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS. Resolva as questões de forma *LIMPA E ORGANIZADA*, *nos espaços designados*. Boa prova.

---

1 [30] Resolva as seguintes equações:

a) [2.2-2b] [10]

$$y' + 4y = 8$$

b) [2.2-2 l] [20]

$$y^2\frac{dx}{dy} + xy - 4y^2 = 1$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) Faço $y = uv$ e substituo na equação diferencial:

$$\begin{aligned}
u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + 4uv &= 8,\\
u\left[\frac{dv}{dx} + 4v\right] + v\frac{du}{dx} &= 8.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dx} &= -4v,\\
\frac{dv}{v} &= -4\,dx\\
\ln|v| &= -4x + k'\\
|v| &= k''e^{-4x},\\
v &= ke^{-4x}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ke^{-4x}\frac{du}{dx} &= 8,\\
\frac{du}{dx} &= \frac{2}{k}[4e^{4x}],\\
u(x) &= \frac{2}{k}e^{4x} + C'\\
y(x) &= \left[\frac{2}{k}e^{4x} + C'\right]ke^{-4x},\\
y(x) &= 2 + Ce^{-4x} \blacksquare
\end{aligned}$$

b) re-arrumo a equação para vê-la melhor:

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = \frac{1}{y^2} + 4$$

Continue a solução no verso ⟹

Faço $x = uv$:

$$
\begin{aligned}
u\frac{dv}{dy} + v\frac{du}{dy} + \frac{uv}{y} &= \frac{1}{y^2} + 4,\\
u\left[\frac{dv}{dy} + \frac{v}{y}\right] + v\frac{du}{dy} &= \frac{1}{y^2} + 4.\\
\frac{dv}{dy} &= -\frac{v}{y},\\
\frac{dv}{v} &= -\frac{dy}{y},\\
\ln|v| &= -\ln|y| + k',\\
\ln|v| + \ln|y| &= k',\\
\ln|vy| &= k',\\
|vy| &= k'',\\
vy &= k,\\
v &= \frac{k}{y}.\\
\frac{k}{y}\frac{du}{dy} &= \frac{1}{y^2} + 4,\\
k\frac{du}{dy} &= \frac{1}{y} + 4y,\\
ku &= \ln|y| + 2y^2 + k_1.\\
x(y) &= \frac{1}{k}\left[\ln|y| + 2y^2 + k_1\right]\frac{k}{y}\\
x(y) &= \frac{\ln|y|}{y} + 2y + \frac{(kk_1)}{y}\\
&= \frac{\ln|y|}{y} + 2y + \frac{C}{y} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [2.2-12b] [30] Dada a equação diferencial de Riccati:

$$y' = y^2 - xy + 1,$$

e sabendo que: (i) $Y(x) = x$ é uma solução particular e (ii) a integral $\int \exp(x^2/2)\,dx$ não pode ser obtida em termos de funções elementares — devendo portanto ser deixada como está —, procure a solução geral na forma

$$y(x) = Y(x) + \frac{1}{u(x)}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Primeiro calculo $\frac{dy}{dx}$:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= Y'(x) - \frac{1}{u^2}\frac{du}{dx},\\
\frac{dy}{dx} &= 1 - \frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}.
\end{aligned}$$

Em seguida substituo na equação diferencial:

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} &= (x+1/u)^2 - x(x+1/u) + 1,\\
1 - \frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} &= x^2 + 2x/u + 1/u^2 - x^2 - x/u + 1\\
-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} &= 2x/u + 1/u^2 - x/u\\
-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} &= x/u + 1/u^2\\
-\frac{du}{dx} &= xu + 1\\
\frac{du}{dx} &= -xu - 1\\
\frac{du}{dx} + xu &= -1.
\end{aligned}$$

Faça $u = vw$:

$$\begin{aligned}
w\frac{dv}{dx} + v\frac{dw}{dx} + xvw &= -1,\\
v\left[\frac{dw}{dx} + xw\right] + w\frac{dv}{dx} &= -1.\\
\frac{dw}{dx} &= -xw,\\
\frac{dw}{w} &= -x\,dx,\\
\ln|w| &= -x^2/2 + k',\\
|w| &= k''\exp(-x^2/2),\\
w &= k\exp(-x^2/2).\\
k\exp(-x^2/2)\frac{dv}{dx} &= -1,\\
\frac{dv}{dx} &= \frac{-1}{k}\exp(x^2/2).\\
v &= \frac{-1}{k}\int \exp(x^2/2)\,dx + C'.\\
u = vw &= -\exp(-x^2/2)\int \exp(x^2/2)\,dx + (kC')\exp(-x^2/2);\\
u &= \exp(-x^2/2)\left[C - \int \exp(x^2/2)\,dx\right].
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

A solução geral é

$$y(x) = x + 1/u(x).$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [2.5-1i] [20] Resolva

$$(\operatorname{sen} xy + xy \cos xy)\,dx + x^2 \cos xy\,dy = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Teste de uma diferencial exata:

$$\frac{\partial(\operatorname{sen} xy + xy\cos xy)}{\partial y} = 2\,x\,\cos(x\,y) - x^2\,y\,\sin(x\,y)\,,$$
$$\frac{\partial(x^2\cos xy)}{\partial x} = 2\,x\,\cos(x\,y) - x^2\,y\,\sin(x\,y)\,;$$

OK.

Compare a forma diferencial com

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy.$$

Agora, as integrais de cada uma das expressões em relação a x e a y são:

Em relação a x :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \operatorname{sen}(xy) + xy\cos(xy);$$
$$F(x,y) = \int (\operatorname{sen}(xy) + xy\cos(xy))\,dx$$
$$= x\operatorname{sen}(xy) + A(y).$$

Em relação a y :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2\cos(xy);$$
$$F(x,y) = x\operatorname{sen}(xy) + B(x).$$

Comparando-se os dois resultados, a resposta do problema é

$$x\operatorname{sen}(xy) = C \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [2.4-9] [20] Mostre que

$$y' = f(x/y)$$

pode ser transformada em uma equação diferencial separável por meio da mudança de variável

$$w(x) = \frac{y(x)}{x}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Se $w = y/x$,

$$\begin{aligned}
y &= xw(x),\\
\frac{dy}{dx} &= x\frac{dw}{dx} + w,\\
x\frac{dw}{dx} + w &= f(1/w),\\
x\frac{dw}{dx} &= f(1/w) - w,\\
\frac{dw}{f(1/w) - w} &= \frac{dx}{x},
\end{aligned}$$

que é uma equação diferencial separável ■

Continue a solução no verso ⟹

1 Encontre a solução geral de:

a) [3.4-4m] [15]: $y''' + y'' - 2y = 0$.

b) [3.4-6f] [15]: $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) Equação homogênea com coeficientes constantes. Substituo $y = e^{\lambda x}$ na equação:

$$(\lambda^3 + \lambda^2 - 2)e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow (\lambda^3 + \lambda^2 - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1 + i,\ \lambda_3 = -1 - i.$$

A solução geral é a combinação das 3 soluções LI:

$$y(x) = Ae^x + e^{-x}\left(Be^{ix} + Ce^{-ix}\right).$$

b) Substituo $y = e^{\lambda x}$ na equação:

$$(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1)e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow (\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Raíz $\lambda = 1$ repetida, procuro:

$$y(x) = A(x)e^x.$$

Substituindo na equação:

$$A''(x) = 0 \Rightarrow A(x) = Bx^2 + Cx + D \Rightarrow y(x) = \left(Bx^2 + Cx + D\right)e^x.$$

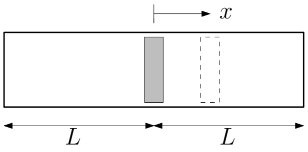
2 [3.5-10c,d] Seja um pistão de massa m no centro de um cilindro de área seccional A e comprimento $2L$, como na figura. Supondo a lei de Boyle para a pressão p e o valor $p = p_0$ em ambos os lados quando o pistão está na posição central $x = 0$. Sabendo que ao ser perturbado a equação que governa o movimento do pistão é

$$mx'' + 2p_0AL\frac{x}{L^2 - x^2} = 0,$$

expanda o termo não-linear $\frac{x}{L^2-x^2}$ em série de Taylor em torno de $x = 0$ e, supondo $x \ll L$, [15] PROVE que a equação se torna

$$mx'' + \frac{2p_0Ax}{L} = 0.$$

[15] Encontre, resolvendo a equação acima, a frequência de oscilação do pistão.
Dica: série de Taylor: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + ...$



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Primeiramente, expandir em série de Taylor emtorno de $x = x_0 = 0$ a função não-linear:

$$\frac{x}{L^2 - x^2} \approx \left(\frac{x}{L^2 - x^2}\right)_{x=0} + \left(\frac{x}{L^2 - x^2}\right)'_{x=0} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{L^2 - x^2}\right)''_{x=0} = 0 + \frac{1}{L^2}x + 0 = \frac{x}{L^2}.$$

Substituindo a função pela sua Série de Taylor truncada, a equação se torna:

$$mx'' + 2p_0AL\frac{x}{L^2} = 0. \Rightarrow x'' + \frac{2p_0A}{mL}x = 0$$

Resolvendo: inserir $x(t) = e^{\lambda t}$ na equação acima, fornece: $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{2p_0A}{mL}}$. A solução geral fica:

$$x(t) = Ae^{i\sqrt{\frac{2p_0A}{mL}}t} + Be^{-i\sqrt{\frac{2p_0A}{mL}}t} = C\cos\left(\sqrt{\frac{2p_0A}{mL}}t\right) + D\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{2p_0A}{mL}}t\right).$$

O período mínimo de oscilação T é o tempo tal que o argumento do seno e o do cosseno deve variar entre, por exemplo, zero e 2π:

$$\sqrt{\frac{2p_0A}{mL}}T = 2\pi.$$

A frequência é, por definição,

$$f = T^{-1} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2p_0A}{mL}}.$$

3 [3.6-11] [20] Resolva:

$$(x+2)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - y = 0. \text{ DICA : substitua } x = t - 2$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Usando $2 + x = t$, e $dx = dt$ na equação:

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} - y = 0.$$

Equação de Cauchy-Euler. Substituindo $y(t) = t^\lambda$, temos

$$t^\lambda \left[\lambda(\lambda-1) - 1\right] = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1) - 1 = 0.$$

Portanto,

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

e a solução geral é então:

$$y(t) = At^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + Bt^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}.$$

Em termos de x:

$$y(x) = A\,(x+2)^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + B\,(x+2)^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}.$$

4 [3.7-4n] [20] resolva

$$x^2y'' - xy' - 3y = 4x, \quad -\infty < x < 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Equação na forma conveniente:

$$y'' - \frac{1}{x}y' - \frac{3}{x^2}y = \frac{4}{x}$$

Solução homogênea:

$$y_h = x^\lambda \Rightarrow x^\lambda\left(\lambda(\lambda-1) - \lambda - 3\right) \Rightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1 \Rightarrow y_h = Ax^3 + \frac{B}{x}.$$

As soluções LI são da forma $y_1 = x^3$, $y_2 = 1/x$. De acordo com o método de variação de parâmetros, vamos procurar a solução particular:

$$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x) = A(x)x^3 + B(x)\frac{1}{x}.$$

Substituindo esta expressão na equação diferencial, e impondo $A'y_1 + B'y_2 = 0$, ficamos com

$$A'y_1' + B'y_2' = \frac{4}{x},$$

formando 2 eq's com 2 incog's (A' e B'). Resolvendo o sistema: $A' = x^{-3}$ e $B' = -x$, então:

$$A = -\frac{1}{2}x^{-2} + C,\ \ B = -\frac{1}{2}x^2 + D \Rightarrow y(x) = \left(-\frac{1}{2}x^{-2} + C\right)x^3 + \left(-\frac{1}{2}x^2 + D\right)\frac{1}{x} = -x + Cx^3 + \frac{D}{x}.$$

TT009 Matemática Aplicada I
P03, 17 Abr 2009
Prof. Nelson Luís Dias

100

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e LEMBRE-SE: COMECE PELAS MAIS FÁCEIS PARA VOCÊ. PROCURE RESOLVER O MAIOR NÚMERO DE ITENS POSSÍVEL, PARA MAXIMIZAR SUA NOTA. MANTENHA-SE CALMA(O), E PENSE UM POUCO EM QUAL SERÁ A SUA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS. Resolva as questões de forma *LIMPA E ORGANIZADA*, *nos espaços designados*. Boa prova.

---

1 [30] [4.2.7] Se $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, e p e q são analíticas em x_0, então a equação diferencial admite soluções em série $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. Obtenha 2 soluções LI **em série**, até o quarto termo, de $y'' + 2y' + y = 0$ em torno de $x_0 = 0$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Faça

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n;$$
$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1};$$
$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2},$$

e substitua na equação diferencial:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Escolha x^n para o expoente comum; então:

$$m = n - 2$$
$$n = m + 2$$

no primeiro somatório, que começará de $m = -2$, e

$$m = n - 1$$
$$n = m + 1$$

no segundo somatório, que começará de $m = -1$:

$$\sum_{m=-2}^{\infty} (m+1)(m+2) a_{m+2} x^m + 2\sum_{m=-1}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Agora, note que os dois primeiros termos do primeiro somatório, e o primeiro termo do segundo somatório, são identicamente nulos devido aos termos $(m+2)$ e $(m+1)$; portanto (e revertendo para n em todos os somatórios):

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

ou:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} + 2(n+1) a_{n+1} + a_n\right] x^n = 0.$$

Continue a solução no verso ⟹

Obtém-se uma única relação de recorrência,

$$a_{n+2} = -\frac{2(n+1)a_{n+1} + a_n}{(n+1)(n+2)}.$$

Substituindo-se m por $n+2$: $m = n+2$; $n = m-2$:

$$a_m = -\frac{2(m-1)a_{m-1} + a_{m-2}}{(m-1)m}.$$

Partindo de $a_0 = 1$, $a_1 = 0$:

$$a_n = 1,\ 0,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{30},\ -\frac{1}{144},\ \ldots$$

Partindo de $a_0 = 0$, $a_1 = 1$:

$$a_n = 0,\ 1,\ -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{6},\ \frac{1}{24},\ -\frac{1}{120},\ \ldots$$

e duas soluções LI são

$$y_1 = 1 + 0x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{8}x^4 + \ldots,$$
$$y_2 = 0 + 1x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \ldots$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [40] [4.3.6-k] Obtenha *pelo menos uma solução* de

$$x(1+x)y'' + y = 0$$

com o método de Frobenius, em torno de $x = 0$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r},$$
$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1},$$
$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2}.$$

Substituindo-se na equação diferencial:

$$xy'' + x^2 y'' + y = 0,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.$$

Agora:

$$m + r = n + r - 1;$$
$$m = n - 1;$$
$$n = m + 1.$$

Substituindo-se n por m no primeiro somatório:

$$\sum_{m=-1}^{\infty} (m+r)(m+r+1) a_{m+1} x^{m+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.$$

Trocando-se novamente m por n, e separando-se o termo $n = -1$:

$$[(-1+r)r] a_0 x^{r-1} +$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ [(n+r)(n+r+1)]\, a_{n+1} + [(n+r-1)(n+r)+1]\, a_n \right\} x^{n+r} = 0.$$

Sem perda de generalidade, escolhe-se $a_0 \neq 0$, donde $r = 0$ ou $r = 1$. A menor raiz pode levar a duas soluções ou a nenhuma, mas a maior raiz certamente levará a uma delas. Como o enunciado pede pelo menos uma, escolho $r = 1$ para achar uma raiz. Para $r = 1$, a relação de recorrência é

$$(n+1)(n+2) a_{n+1} + [(n)(n+1)+1]\, a_n = 0,$$
$$m(m+1) a_m + [(m-1)m+1]\, a_{m-1} = 0$$
$$a_m = -\frac{m^2 - m + 1}{m^2 + m} a_{m-1},$$
$$a_{n+1} = -\frac{n^2 + n + 1}{(n+1)(n+2)}.$$

Donde:

$$y_1(x) = x \left[1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{48}x^3 + \frac{91}{960}x^4 - \ldots \right].$$

Como $r = 1$, trata-se de uma série de potências, cujo raio de convergência pode ser calculado com o Teorema 4.2.2 do livro texto:

$$R = \frac{1}{\lim_{m\to\infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right|} = 1.$$

De volta à equação diferencial, vemos que o raio de convergência é tão pequeno porque, além de $x = 0$, $x = -1$ também é um ponto singular: a série em torno de $x = 0$ "esbarra" na singularidade em $x = -1$.

Continue a solução no verso ⟹

3 [4.5.10] [30] Sabendo que

$$\Gamma(x) = \int_{t=0}^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt,$$

mostre que

$$\int_0^{\infty} e^{-x^p}\, dx = \frac{\Gamma(1/p)}{p} \qquad (p > 0).$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Faça

$$\begin{aligned} x^p &= t, \\ px^{p-1}dx &= dt, \\ x &= t^{1/p}, \\ x^{p-1} &= t^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

e substitua na integral:

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{px^{p-1}} = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{pt^{\frac{p-1}{p}}} = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{p}-1} e^{-t}\, dt = \frac{\Gamma(1/p)}{p} \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
P04, 08 Mai 2009
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: GABARITO

100

Assinatura: ________________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e LEMBRE-SE: COMECE PELAS MAIS FÁCEIS PARA VOCÊ. PROCURE RESOLVER O MAIOR NÚMERO DE ITENS POSSÍVEL, PARA MAXIMIZAR SUA NOTA. MANTENHA-SE CALMA(O), E PENSE UM POUCO EM QUAL SERÁ A SUA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS. Resolva as questões de forma *LIMPA E ORGANIZADA*, *nos espaços designados*. Boa prova.

1 [5.2-9] Calcule a transformada de Laplace de $e^{at}\cos bt$ de duas formas: a) [15] usando a definição de transformada de laplace e integrando por partes; e b) [15] usando $\cos bt = \mathrm{Re}\{e^{ibt}\}$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a)

$$
\begin{aligned}
L\{e^a \cos bt\} &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\cos bt dt = \left.\frac{e^{-(s-a)t}\operatorname{sen} bt}{b}\right|_0^\infty + \frac{(s-a)}{b}\int_0^\infty e^{-(s-a)t}\operatorname{sen} bt dt \\
&= \frac{(s-a)}{b}\left[-\left.\frac{e^{-(s-a)t}}{b}\cos bt\right|_0^\infty - \frac{(s-a)}{b}\int_0^\infty e^{-(s-a)t}\cos bt dt\right]
\end{aligned}
$$

Supondo $s > a$, os termos de fronteira em $+\infty \to 0$. Notando que $\cos 0 = 1$ e $\operatorname{sen} 0 = 0$:

$$
\int_0^\infty e^{-(s-a)t}\cos bt dt = \frac{(s-a)}{b^2} - \frac{(s-a)^2}{b^2}\int_0^\infty e^{-(s-a)t}\cos bt dt,
$$

Portanto:

$$
\int_0^\infty e^{-(s-a)t}\cos bt dt = \frac{(s-a)}{b^2}\left[1+\frac{(s-a)^2}{b^2}\right]^{-1} = \frac{(s-a)}{b^2+(s-a)^2}.
$$

b) Combinando os exponenciais, integrando e tomando a parte real:

$$
\begin{aligned}
L\{e^a \cos bt\} &= \mathrm{Re}\left[\int_0^\infty e^{ibt+(a-s)t}dt\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[\left.\frac{e^{(ib+a-s)t}}{(ib+a-s)}\right|_0^\infty\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[0 - \frac{1}{(ib+a-s)}\right] = \mathrm{Re}\left[-\frac{(a-s)-ib}{b^2+(a-s)^2}\right] \\
&= -\frac{(a-s)}{b^2+(a-s)^2}.
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 Calcule a transformada inversa de:

a) [5.3-1c] [15]: $1/(s^2 - a^2)$.

b) [5.3-3g] [15]: $(s+1)/(s^2 - s)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) Usando a tabela:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - a^2}\right\} = \frac{1}{a}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2 - a^2}\right\} = \frac{\operatorname{senh} at}{a}.$$

b)

$$\frac{s+1}{s^2 - s} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s}\frac{1}{s-1}.$$

Como

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at},$$

a transformada da soma acima é (usando convolução entre 1 e e^t):

$$e^t + \int_0^t e^\tau \, d\tau = 2e^t - 1.$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [5.4-1n] [20] Resolva para $x(t)$:

$$x''' + x'' - 2x' = 1 + e^t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Aplicando Laplace com as condições iniciais: $s^3\overline{x} + s^2\overline{x} - 2s\overline{x} = 1/s + 1/(s-1)$, então

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}}{s^3 + s^2 - 2s} \\
&= \frac{\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}}{s(s^2 + s - 2)} \\
&= \frac{\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}}{s(s-1)(s+2)} \\
&= \frac{\frac{2s-1}{s(s-1)}}{s(s-1)(s+2)} \\
&= \frac{2s-1}{s^2(s-1)^2(s+2)} \\
&= \frac{2}{s(s-1)^2(s+2)} - \frac{1}{s^2(s-1)^2(s+2)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s-1)^2(s+2)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-1)^2(s+2)}\right\} \\
&= 2\left(1 * te^t * e^{-2t}\right) - \left(t * te^t * e^{-2t}\right) \\
&= \frac{3}{4}e^{2t} - (t+1)e^t + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [5.6-1b] [20] Resolva:

$$x'' - 4x = 6\delta(t-1), \quad x(0) = 0; \;\; x'(0) = -3.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
s^2\overline{x} - sx(0) - x'(0) - 4\overline{x} &= 6e^{-s},\\
s^2\overline{x} + 3 - 4\overline{x} &= 6e^{-s},\\
\overline{x}(s^2-4) &= 6e^{-s} - 3,\\
\overline{x} &= \frac{6e^{-s}-3}{s^2-4},\\
&= \frac{6e^{-s}}{s^2-4} - \frac{3}{s^2-4},\\
&= \frac{6}{4}\frac{4}{s^2-4}e^{-s} - \frac{3}{4}\frac{4}{s^2-4} \Rightarrow\\
x(t) &= \frac{6}{4}H(t-1)\operatorname{senh} 2(t-1) - \frac{3}{4}\operatorname{senh} 2t \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
P05, 22 Mai 2009
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: GABARITO

100

Assinatura: ______________________

ATENÇÃO: Não basta "copiar e colar" da tabela abaixo nas questões: quando um resultado for pedido explicitamente, é preciso deduzi-lo; quando uma das relações da tabela for utilizada, é preciso mencioná-la e justificá-la. Boa prova.

1 [30] [11.2-3] Calcule todos os autovalores e autovetores de:

a) [15]

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) [15]

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A solução por `MAXIMA` é:

```
(%i1) a : matrix( [2,0,0],
            [0,1,1],
            [0,1,1]);
                                    [ 2  0  0 ]
                                    [         ]
(%o1)                               [ 0  1  1 ]
                                    [         ]
                                    [ 0  1  1 ]
(%i2) eigenvectors(a) ;
(%o2)        [[[0, 2], [1, 2]], [0, 1, - 1], [1, 0, 0], [0, 1, 1]]
(%i3) b : matrix( [4, 4, 4],
            [4, 4, 4],
            [4, 4, 4]);
                                    [ 4  4  4 ]
                                    [         ]
(%o3)                               [ 4  4  4 ]
                                    [         ]
                                    [ 4  4  4 ]
(%i4) eigenvectors(b);
(%o4)      [[[0, 12], [2, 1]], [1, 0, - 1], [0, 1, - 1], [1, 1, 1]]
(%i5)
```

Continue a solução no verso ⟹

O que significa que, no caso a),

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 2,\\
[\boldsymbol{v}_1] = [0, 1, -1]^{\mathrm{T}},\\
[\boldsymbol{v}_2] = [1, 0, 0]^{\mathrm{T}},\\
[\boldsymbol{v}_3] = [0, 1, 1]^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}$$

Há dois autovetores LI para $\lambda = 2$. Eles geram um plano, cujo normal é $\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_3 = [0, -1, 1]^{\mathrm{T}}$.
No caso b),

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 12,\\
[\boldsymbol{v}_1] = [1, 0, -1]^{\mathrm{T}},\\
[\boldsymbol{v}_2] = [0, 1, -1]^{\mathrm{T}},\\
[\boldsymbol{v}_3] = [1, 1, 1]^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}$$

Há dois autovetores LI para $\lambda = 0$. Eles geram um plano, cujo normal é $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = [1, 1, 1]^{\mathrm{T}}$.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [30] [7.2-4] Determine a equação das trajetórias no espaço de fase de $x' = y^2, \qquad y' = -xy.$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Começo montando o sistema de equações,

$$\frac{dy}{dt} = -xy,$$
$$\frac{dx}{dt} = y^2.$$

Dividindo a primeira linha pela segunda,

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-xy}{y^2} = \frac{-x}{y};$$
$$\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -\frac{x}{y};$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y};$$
$$y\,dy + x\,dx = 0;$$
$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [40] [7.4-11] **O uso de autovalores e autovetores nesta questão é obrigatório.** Classifique a singularidade na origem como: centro, foco, nó ou sela. Se for um foco, nó ou sela, classifique ainda se é estável ou instável.

$$
\begin{aligned}
x' &= x + 3y \\
y' &= -x - y
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Escrevo o sistema em forma matricial,

$$
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.
$$

Calculo (apenas) os autovalores:

```
(%i1) a : matrix( [1,3],
            [-1,-1]);
                                        [  1    3  ]
(%o1)                                   [          ]
                                        [ - 1  - 1 ]
(%i2) eigenvalues(a) ;
(%o2)                [[- sqrt(2) %i, sqrt(2) %i], [1, 1]]
```

de forma que os autovalores são:

$$
\lambda_1 = \sqrt{2}i, \qquad \lambda_2 = -\sqrt{2}i
$$

e o ponto crítico é um centro ∎

Continue a solução no verso ⟹

TT009 Matemática Aplicada I
P06, 05 Jun 2009
Prof. Nelson Luís Dias

100

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

1 [15.2-3d] [30] Seja a curva $\mathbf{R}(\tau) = \cos\tau(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}) - \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\tau\hat{\mathbf{k}}$, onde $0 \le \tau \le \infty$. Encontre o comprimento $s(\tau)$ da curva entre $\tau = 0$ e um valor arbitrário de τ, sabendo que $s(\tau = 0) = 0$. Neste problema, $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ são a base ortonormal cartesiana do $\mathbb{R}^3$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Primeiramente, o comprimento da curva será $s(\tau) = \int_0^\tau ds$. Resta calcular o comprimento elementar ds em função do parâmetro τ:

$$ds = \|d\mathbf{R}\| = \left|\frac{d\mathbf{R}}{d\tau}\right| d\tau = \frac{\sqrt{d\mathbf{R}\cdot d\mathbf{R}}}{d\tau} d\tau = \sqrt{\frac{d\mathbf{R}}{d\tau}\cdot\frac{d\mathbf{R}}{d\tau}}\, d\tau = \sqrt{\mathbf{R}'\cdot\mathbf{R}'}\, d\tau.$$

Como $\mathbf{R}'(\tau) = -\,\mathrm{sen}(\tau)[\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}] - \sqrt{2}\cos\tau\hat{\mathbf{k}}$, temos

$$ds = \sqrt{2(\mathrm{sen}^2\tau + \cos^2\tau)}\, d\tau, \quad s(\tau) = \int_0^\tau \sqrt{2}\, du = \sqrt{2}\tau$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [15.5-1b] [40] Usando a fórmula $dA = \|\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v\| dudv$, calcule a área da superfície do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ entre o plano $z = 0$ e a superfície $z = 1 - y^2$. Dica: use $z = u$, $x = \cos v$, $y = \operatorname{sen} v$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$dA = \|\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v\| dudv = \|(0,0,1) \times (-\operatorname{sen} v, \cos v, 0)\| dudv = \|(-\cos v, -\operatorname{sen} v, 0)\| dudv = \sqrt{\operatorname{sen}^2 + \cos^2} dudv = dudv$$

Os limites de integração são $[0, \pi/2]$ e $[0, 1 - \operatorname{sen}^2 v]$ para u e v respectivamente. Portanto, a área pedida $\oint dA$, fica

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{1-\operatorname{sen}^2 v} dudv = \int_0^{2\pi} 1 - \operatorname{sen}^2 v dv = \int_0^{2\pi} \cos^2 v dv = \cos v \operatorname{sen} v|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} - \operatorname{sen}^2 v dv.$$

Portanto,

$$2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 v dv = \int_0^{2\pi} dv = 2\pi \ \rightarrow \ \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\operatorname{sen}^2 v} dudv = \pi$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [16.8-2d] [30] Seja S uma superfície fechada em torno de uma região de volume V e $\hat{\mathbf{n}}$ o vetor unitário normal a dA. **Prove** que $\iint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) dA = 3V$. Neste problema, $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ são a base ortonormal cartesiana do $\mathbb{R}^3$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Questão anulada por erro de enunciado.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
P07, 26 Jun 2009
Prof. Nelson Luís Dias

NOME: GABARITO

100

Assinatura: ____________________

---

1 [23.3-9b] [30] Se C é o círculo $|z| = 3$, calcule

$$\oint_C \frac{dz}{z(z-5)}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{dz}{z(z-5)} &= \oint_C \left[\frac{1}{5(z-5)} - \frac{1}{5z}\right] dz \\
&= \oint_C \frac{1}{5(z-5)}\, dz - \oint_C \frac{1}{5z}\, dz \\
&= 0 - \frac{2\pi i}{5} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [24.3-4b] [30] Obtenha os 3 primeiros termos não-nulos da série de Laurent de

$$\frac{1}{z^2+1}$$

em $1 < |z| < \infty$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

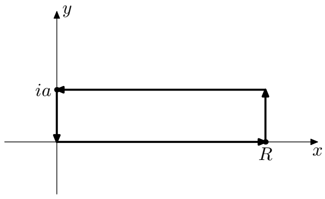
Note que $|z| > 1$, e que portanto é preciso ter o cuidado de construir um termo cujo módulo seja garantidamente menor que 1 no denominador, antes de gerar uma série correspondente:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2+1} &= \frac{1}{z^2}\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} \\
&= \frac{1}{z^2}\left[1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^6} + \ldots\right] \\
&= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} - \ldots \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [24.5-7] [40] Calcule

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2ax)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-a^2} \qquad (a>0)$$



integrando $f(z) = e^{-z^2}$ em torno do retângulo (mostrado na figura) com vértices em 0, R, $R+ia$ e ia, e **usando (o valor conhecido d')a integral**

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Começo etiquetando os segmentos de integração:

$$\begin{aligned}
[0,R] &= H_1,\\
[R,R+ia] &= V_1,\\
[R+ia,ia] &= H_2,\\
[ia,0] &= V_2.
\end{aligned}$$

Seja agora

$$f(z) = e^{-z^2}e^{2iaz};$$

é evidente que, sobre H_1, $z = x$, e

$$\lim_{R\to\infty}\Re\int_{H_1} f(z)dz = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2ax)\,dx,$$

que é a integral desejada. Também é evidente que $f(z)$ é uma função inteira, não havendo singularidades nem dentro, nem fora da trajetória fechada de integração. Agora, em V_1, $z = R+iy$, $dz = idy$, e

$$\begin{aligned}
\int_{V_1} f(z)\,dz &= \int_{y=0}^a e^{-(R+iy)^2}e^{2ia(R+iy)}i\,dy\\
&= \int_{y=0}^a e^{-(R^2+2Riy-y^2)}e^{2iaR-2y^2}i\,dy\\
&= \int_{y=0}^a e^{-R^2-y^2}e^{i(-2Ry+2Ra)}i\,dy;\\
\left|\int_{V_1} f(z)\,dz\right| &\le \int_{y=0}^a \left|e^{-R^2-y^2}e^{i(-2Ry+2Ra)}i\,dy\right|\\
&= \int_{y=0}^a \left|e^{-R^2-y^2}\,dy\right|\\
&\le \int_{y=0}^a e^{-R^2}\,dy = ae^{-R^2} \to 0,\ \text{quando} R\to\infty.
\end{aligned}$$

Sobre V_2, $z = iy$, $dz = i\,dy$, e

$$\begin{aligned}
\int_{V_2} f(z)\,dz &= \int_{y=a}^0 e^{-(iy)^2}e^{2ia(iy)}i\,dy\\
&= \int_{y=a}^0 e^{y^2}e^{-2ay}i\,dy\\
&= \int_{y=a}^0 e^{y^2-2ay}i\,dy.
\end{aligned}$$

Esta integral *não* se anula quando $R\to\infty$; porém, note que

$$\Re\int_{V_2} f(z)\,dz = 0$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Finalmente, sobre H_2, $z = x + ia$, $dz = dx$, e

$$\begin{aligned}
\int_{H_2} f(z)\,dz &= \int_R^0 e^{-(x+ia)^2} e^{2ia(x+ia)}\,dx \\
&= \int_R^0 e^{-(x^2+2ixa-a^2)} e^{2iax-2a^2}\,dx \\
&= \int_R^0 e^{-x^2-2ixa+a^2+2ixa-2a^2}\,dx \\
&= \int_R^0 e^{-x^2-a^2}\,dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{H_2} f(z)\,dz = e^{-a^2} \int_\infty^0 e^{-x^2}\,dx = -e^{-a^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Concluímos que, no $\lim_{R\to\infty}$: a integral sobre H_1 possui uma parte real igual à integral desejada; a integral sobre V_1 tende a zero; a integral sobre H_2 é puramente real e de valor conhecido; e a integral sobre V_2 é puramente imaginária. Pelo Teorema de Cauchy, segue-se que

$$\begin{aligned}
\Re\left[\int_{H_1} f(z)\,dz\right] + \int_{H_2} f(z)\,dz = 0, \\
\Re\left[\int_{H_1} f(z)\,dz\right] = -\int_{H2} f(z)\,dz, \\
\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2ax)\,dx = e^{-a^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
F, 06 Jul 2009
Prof. Nelson Luís Dias
Prof. Maurício Gobbi

100

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [3.7-2q] [25] Resolva

$$y''' - y'' = 6x + 2\cosh x.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A equação característica da equação homogênea associada é

$$\lambda^3 - \lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 1) = 0$$

cujas raízes são $\lambda = 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$. A solução da homogênea associada, portanto, é

$$y_h(x) = A + Bx + Ce^x.$$

Tento

$$y_p(x) = A + Bx + Ce^x,$$

onde agora A, B e C são funções a determinar. Derivando,

$$\begin{aligned}
y'_p &= \underbrace{A' + B'x + C'e^x}_{=0} + B + Ce^x,\\
y''_p &= \underbrace{B' + C'e^x}_{=0} + Ce^x,\\
y'''_p &= C'e^x + Ce^x.
\end{aligned}$$

Os termos sobre as chaves horizontais são zero para "controlar" as derivadas de A, B e C, impedindo que surjam derivadas de mais alta ordem. Substituindo as expressões encontradas na equação diferencial não-homogênea,

$$\begin{aligned}
C'e^x + Ce^x - Ce^x &= 6x + 2\cosh x\\
C' &= 6xe^{-x} + 2e^{-x}\frac{e^x + e^{-x}}{2}\\
C' &= 6xe^{-x} + 1 + e^{-2x}\\
C(x) &= -6(x+1)e^{-x} - e^{-2x}/2 + x\\
B' + C'e^x &= 0\\
B' &= -\left[6xe^{-x} + 1 + e^{-2x}\right]e^x\\
&= -\left[6x + e^x + e^{-x}\right]\\
B(x) &= -3x^2 - (e^x - e^{-x})\\
A' - \left[6xe^{-x} + 1 + e^{-2x}\right]xe^x + \left[6xe^{-x} + 1 + e^{-2x}\right]e^x &= 0\\
A(x) &= x(e^x - e^{-x}) - 2e^x + 2x^3 - 3x^2.
\end{aligned}$$

Juntando tudo,

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A + Bx + Ce^x + xe^x - 2e^x - e^{-x}/2 - x^3 - 3x^2 - 6x - 6 \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [4.2-7j] [25] Obtenha a solução geral de

$$y'' - x^3 y = 0$$

em torno de $x = 0$ e determine o mínimo raio de convergência das séries.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Compare com

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 :$$

Em $x = 0$, $xp(x) = 0$, é uma função analítica, e $x^2 q(x) = x^5$ também. O ponto $x = 0$ é um ponto *regular*. Não se trata, portanto, de aplicar o método de Frobenius, mas sim de procurar uma solução em série simples,

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \\
y' &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \\
y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2}.
\end{aligned}$$

Substituindo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+3} = 0.$$

Tente

$$\begin{aligned}
m - 2 = n + 3 \Rightarrow m = n + 5; n = 0 \Rightarrow m = 5 :\\
\sum_{m=0}^{\infty} (m-1) m a_m x^{m-2} - \sum_{m=5}^{\infty} a_{m-5} x^{m-2} = 0,\\
\sum_{m=2}^{\infty} (m-1) m a_m x^{m-2} - \sum_{m=5}^{\infty} a_{m-5} x^{m-2} = 0,\\
2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0,\\
6a_3 x = 0 \Rightarrow a_3 = 0,\\
12 a_4 x^2 = 0 \Rightarrow a_4 = 0,\\
\sum_{m=5}^{\infty} \left[(m-1) m a_m - a_{m-5}\right] x^{m-2} = 0.
\end{aligned}$$

Claramente, as constantes arbitrárias da solução geral são a_0 e a_1. A relação de recorrência é

$$\begin{aligned}
a_m &= \frac{a_{m-5}}{(m-1)m} : \\
a_5 &= \frac{a_0}{20}, & a_6 &= \frac{a_1}{30} \\
a_{10} &= \frac{a_0}{1800}, & a_{11} &= \frac{a_1}{3300} \\
a_{15} &= \frac{a_0}{378000}, & a_{16} &= \frac{a_1}{792000} \\
a_{20} &= \frac{a_0}{14364000}, & a_{21} &= \frac{a_1}{332640000} \\
& \dots
\end{aligned}$$

A solução geral é

$$\begin{aligned}
y(x) = a_0 &\left[1 + x^5/20 + x^{10}/1800 + x^{15}/378000 + x^{20}/14364000 + \dots\right] \\
+ a_1 &\left[x + x^6/30 + x^{11}/3300 + x^{16}/792000 + x^{21}/332640000 + \dots\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

O raio de convergência é

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

No nosso caso,

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left|\frac{a_n}{a_{n-5}}\right|} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{\infty}} = \infty \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [5.3-1a e 5.3-10b] [25] Sendo $\mathscr{L}$ a transformada de Laplace, e $\mathscr{L}^{-1}$ a sua inversa,

a) [10] calcule

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s(s+8)}\right\}.$$

b) [25] Calcule

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t \cos 3(t-\tau)\,d\tau\right\}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) Um caminho entre muitos é separar em frações parciais,

$$\begin{aligned}\frac{3}{s(s+8)} &= \frac{3}{8}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+8}\right];\\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} &= 1,\\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+8}\right\} &= e^{-8t},\\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s(s+8)}\right\} &= \frac{3}{8}\left[1-e^{-8t}\right] \blacksquare\end{aligned}$$

b) Por definição,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{\int_0^t \cos 3(t-\tau)\,d\tau\right\} &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-st}\int_{\tau=0}^{t} \cos 3(t-\tau)\,d\tau\,dt\\ &= \int_{\tau=0}^{\infty}\int_{t=\tau}^{\infty} e^{-st}\cos 3(t-\tau)\,dt\,d\tau\\ &= \int_{\tau=}^{\infty}\frac{se^{-s\tau}}{s^2+9}\,d\tau\\ &= \frac{1}{s^2+9} \blacksquare\end{aligned}$$

De maneira ainda mais simples,

$$\begin{aligned}\int_0^t \cos 3(t-\tau)\,d\tau &= \frac{\operatorname{sen} 3t}{3},\\ \mathscr{L}\left\{\frac{\operatorname{sen} 3t}{3}\right\} &= \frac{1}{s^2+9} \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [24.5-3k] [25] Utilizando integração de contorno, calcule

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\operatorname{sen}^2\theta}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Faça

$$\begin{aligned} z &= e^{i\theta},\\ dz &= ie^{i\theta}\,d\theta;\\ f(z) &= \frac{1}{1+\left[\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})\right]^2}\\ &= \frac{1}{1+\left[\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]^2}\\ &= -\frac{4z^2}{(z^2-2z-1)(z^2+2z-1)} \end{aligned}$$

As raízes da expressão do denominador são:

$$\begin{array}{lll} z^2-2z-1: & z_1 = 1-\sqrt{2} & z_2 = 1+\sqrt{2}\\ z^2+2z-1: & z_3 = -1-\sqrt{2} & z_4 = \sqrt{2}-1 = -z_1. \end{array}$$

Portanto, apenas z_1 e z_4 estão dentro do contorno $C: \ z = e^{i\theta}$ (o círculo unitário), e ambos são claramente pólos de ordem 1. A integral que desejamos calcular é

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\operatorname{sen}^2\theta} = \oint_C \frac{f(z)}{iz}\,dz = \oint_C \frac{4iz}{(z^2-2z-1)(z^2+2z-1)}\,dz$$

Usando o teorema dos resíduos,

$$I = 2\pi i\left(c_{-1}^{(1)} + c_{-1}^{(4)}\right).$$

Cálculo dos resíduos:

$$\begin{aligned} c_{-1}^{(1)} &= \lim_{z\to 1-\sqrt{2}} \frac{4iz(z-(1-\sqrt{2}))}{(z^2-2z-1)(z^2+2z-1)} = \frac{(5\sqrt{2}-7)i}{14\sqrt{2}-20}\\ c_{-1}^{(4)} &= \lim_{z\to \sqrt{2}-1} \frac{4iz(z-(\sqrt{2}-1))}{(z^2-2z-1)(z^2+2z-1)} = \frac{(5\sqrt{2}-7)i}{14\sqrt{2}-20}\\ I &= 2\pi i\left(c_{-1}^{(1)} + c_{-1}^{(4)}\right) = -\frac{(10\sqrt{2}-14)\pi}{7\sqrt{2}-10} \approx 4{,}443 \ \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹