TT010 Matemática Aplicada I
P01, 08 Ago 2008
Prof. Nelson Luís Dias
GABARITO

0

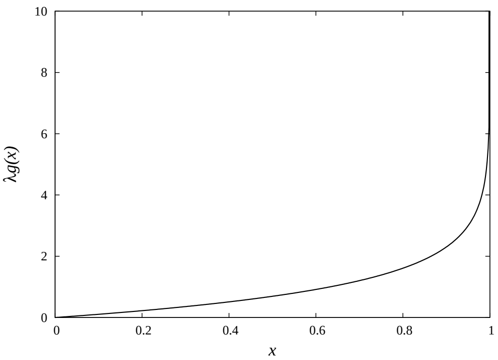
Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e LEMBRE-SE: COMECE PELAS MAIS FÁCEIS PARA VOCÊ. PROCURE RESOLVER O MAIOR NÚMERO DE ITENS POSSÍVEL, PARA MAXIMIZAR SUA NOTA. MANTENHA-SE CALMA(O), E PENSE UM POUCO EM QUAL SERÁ A SUA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS. Resolva as questões de forma *LIMPA E ORGANIZADA*, *nos espaços designados*. Boa prova.

1 [4,0] Seja X uma variável aleatória com $0 \le X \le 1$ e f.d.p. $f_X(x) = 1$. Seja

$$Y = g(X) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-X)$$

conforme mostrado na figura ao lado. Obtenha a f.d.p. $f_Y(y)$.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A função $g(x)$ é biunívoca e crescente; portanto, posso fazer:

$$\begin{aligned} f_Y(y)dy &= f_X(x)dx, \\ f_Y(y) &= \frac{dx}{dy} f_X(x(y)). \end{aligned}$$

Preciso portanto inverter a g:

$$\begin{aligned} \ln(1-x) &= -\lambda y, \\ 1-x &= \exp(-\lambda y) \\ x &= 1-\exp(-\lambda y) \\ \frac{dx}{dy} &= \lambda\exp(-\lambda y). \end{aligned}$$

Portanto,

$$f_Y(y) = \lambda\exp(-\lambda y)\underbrace{f_X(x(y))}_{=1} = \lambda\exp(-\lambda y) \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [6,0] Para resolver esta questão, você vai precisar dos seguintes fatos:

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt, \qquad\qquad x\Gamma(x) = \Gamma(x+1).$$

A distribuição de probabilidades exponencial-potência possui a seguinte f.d.p.:

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{1+\delta/2}\Gamma(1+\delta/2)\beta}\exp\left[-\frac{1}{2}\left|\frac{x-\mu}{\beta}\right|^{2/\delta}\right],$$

onde $\mu \in \mathbb{R}$, e $\beta, \delta \in [0, +\infty)$. A mudança de variável $\xi = (x-\mu)/\beta$ produz integrais de funções pares e ímpares, mais fáceis de calcular. Fazendo ainda $t = (1/2)\xi^{2/\delta}$:

a) [3,0] mostre que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$;

b) [3,0] mostre que $\langle X\rangle = \mu$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) Faço $K = 2^{1+\delta/2}\Gamma(1+\delta/2)\beta$, e concentro-me na integral propriamente dita:

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left|\frac{x-\mu}{\beta}\right|^{2/\delta}\right]dx = \int_{\xi=-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}|\xi|^{2/\delta}\right]\beta d\xi = 2\beta\int_{\xi=0}^{+\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}\xi^{2/\delta}\right]d\xi.$$

Na última igualdade, eu usei o fato de que a função a ser integrada em ξ é par, e me livrei do $|\xi|$, que é analiticamente intratável. Agora, lembrando-me da função Gama, faço a seguinte mudança de variável:

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2}\xi^{2/\delta}; \\ \xi &= (2t)^{\delta/2}; \\ dt &= \frac{1}{\delta}\xi^{2/\delta-1}\,d\xi. \end{aligned}$$

Re-escrevo a última integral acima:

$$2\beta\int_{\xi=0}^{+\infty}\delta\xi^{1-2/\delta}\underbrace{\exp\left[-\frac{1}{2}\xi^{2/\delta}\right]}_{e^{-t}}\underbrace{\frac{1}{\delta}\xi^{2/\delta-1}\,d\xi}_{dt}.$$

Mas

$$(\xi)^{1-2/\delta} = \left((2t)^{\delta/2}\right)^{1-2/\delta} = (2t)^{\delta/2-1}.$$

A integral torna-se

$$\begin{aligned} 2\beta\delta\int_{t=0}^{\infty}(2t)^{\delta/2-1}e^{-t}\,dt &= 2(2)^{\delta/2-1}\beta\delta\int_{t=0}^{\infty}t^{\delta/2-1}e^{-t}\,dt \\ &= (2)^{\delta/2}\beta\delta\Gamma(\delta/2) \\ &= 2\times(2)^{\delta/2}\beta\frac{\delta}{2}\Gamma(\delta/2) \\ &= 2^{1+\delta/2}\Gamma(1+\delta/2)\beta = K \ \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

b) A próxima integral é

$$
\begin{aligned}
\langle X \rangle &= \frac{1}{K}\int_{x=-\infty}^{+\infty} x \exp\left[-\frac{1}{2}\left|\frac{x-\mu}{\beta}\right|^{2/\delta}\right]\,dx \\
&= \frac{1}{K}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty} (\mu+\beta\xi)\exp\left[-\frac{1}{2}\left|\xi\right|^{2/\delta}\right]\beta\,d\xi \\
&= \frac{\mu}{K}\underbrace{\int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left|\xi\right|^{2/\delta}\right]\beta\,d\xi}_{I_1} + \frac{1}{K}\underbrace{\int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \beta\xi\exp\left[-\frac{1}{2}\left|\xi\right|^{2/\delta}\right]\beta\,d\xi}_{I_2};
\end{aligned}
$$

mas do item a) sabemos que $I_1 = K$; além disso, I_2 é a integral de de uma função ímpar de $-\infty$ a $+\infty$; portanto, $I_2 = 0$, e

$$\langle X \rangle = \mu \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada II
P02, 22 Ago 2008
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: GABARITO

0

Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e LEMBRE-SE: COMECE PELAS MAIS FÁCEIS PARA VOCÊ. PROCURE RESOLVER O MAIOR NÚMERO DE ITENS POSSÍVEL, PARA MAXIMIZAR SUA NOTA. MANTENHA-SE CALMA(O), E PENSE UM POUCO EM QUAL SERÁ A SUA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS. Resolva as questões de forma *LIMPA E ORGANIZADA*, *nos espaços designados*. Boa prova.

---

1 [4,0] Seja $Z = \max\{X_1, X_2\}$ (Z é o máximo de X_1, X_2) onde X_1 e X_2 são duas variáveis aleatórias independentes e idênticamente distribuídas, com função densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \frac{1}{b}\exp\left(-\frac{x}{b}\right).$$

Sabendo que $P\{Z \le z\} = P\left(\{X_1 \le z\} \cap \{X_2 \le z\}\right)$:

a) [2,0] Obtenha a função distribuição acumulada de Z, e a função densidade de probabilidade de Z.

b) [2,0] Calcule $\mathrm{E}\{Z\}$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A f.d.a. de X é

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{b}e^{-\xi/b}\,d\xi = 1 - \exp(-\frac{x}{b}).$$

Portanto, a f.d.a. de Z é

$$F_Z(z) = \left[1 - \exp(-\frac{z}{b})\right]^2 = 1 - 2e^{-\frac{z}{b}} + e^{-\frac{2z}{b}}.$$

A f.d.p. de Z é

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}F_Z(z) = \frac{2}{b}\left[e^{-\frac{z}{b}} - e^{-\frac{2z}{b}}\right]$$

O valor esperado de Z é

$$\mathrm{E}\{Z\} = \int_0^\infty z\frac{2}{b}\left[e^{-\frac{z}{b}} - e^{-\frac{2z}{b}}\right]dz = \frac{3b}{2} \blacksquare$$

2 [6,0] Considere a distribuição de probabilidades cujas f.d.a. e f.d.p. são

$$F_X(x) = \operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{b}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{u=0}^{\frac{x-a}{b}} e^{-u^2}\,du, \qquad f_X(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}b} e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}, \qquad x \ge a.$$

Cuidado! Esta **não** é a distribuição normal. Nos itens b), c), d) a seguir, você pode usar os resultados dos itens anteriores mesmo que não tenha conseguido obtê-los.

a) [2,0] Mostre que $\mathrm{E}\{X\} = a + b/\sqrt{\pi}$.

b) [2,0] Mostre $\mathrm{Var}\{X\} = (1/2 - 1/\pi)b^2$.

c) [1,0] Para os dados de projeto do vertedor da usina de Tucuruí, listados abaixo, obtenha a e b pelo método dos momentos.

d) [1,0] Sabendo que $\operatorname{erf}(2{,}751065) = 0{,}9999$, calcule a vazão de projeto (usando a distribuição desta questão) cuja probabilidade de excedência é (1/10000) (a vazão com tempo de retorno de 10000 anos).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Vazões diárias máximas anuais em Tucuruí, 1970–1982.

Ano	Vazão ($\mathrm{m^3\,s^{-1}}$)
1970	34.100
1971	18.000
1972	22.300
1973	27.900
1974	42.500
1975	31.000
1976	20.300
1977	35.900
1978	47.200
1979	47.600
1980	68.300
1981	36.400
1982	41.500

a) O valor esperado de X é

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\{X\} &= \int_a^\infty \frac{2x}{\sqrt{\pi}b} e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}\,dx \\
&= \int_{\xi=0}^\infty \frac{2(a+\xi)}{\sqrt{\pi}b} e^{-\left(\frac{\xi}{b}\right)^2}\,d\xi \\
&= a + \frac{b}{\sqrt{\pi}} \int_{u=0}^\infty 2ue^{-u^2}\,du \\
&= a + \frac{b}{\sqrt{\pi}}.
\end{aligned}$$

b) A variância é

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\{X\} &= \int_a^\infty \left[x - \left(a + \frac{b}{\sqrt{\pi}}\right)\right]^2 \frac{2}{\sqrt{\pi}b} e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}\,dx \\
&= \int_{\xi=0}^\infty \left[\xi - \frac{b}{\sqrt{\pi}}\right]^2 \frac{2}{\sqrt{\pi}b} e^{-\left(\frac{\xi}{b}\right)^2}\,d\xi \\
&= \int_{\xi=0}^\infty \left[\xi^2 - 2\frac{b}{\sqrt{\pi}}\xi + \frac{b^2}{\pi}\right] \frac{2}{\sqrt{\pi}b} e^{-\left(\frac{\xi}{b}\right)^2}\,d\xi
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Aqui, é melhor calcular cada integral resultante separadamente, da mais fácil para a mais difícil:

$$\frac{b^2}{\pi}\int_{\xi=0}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{\pi}b}e^{-\left(\frac{\xi}{b}\right)^2}\,d\xi = \frac{b^2}{\pi};$$

$$\begin{aligned}-\frac{2b}{\sqrt{\pi}}\int_{\xi=0}^{\infty}\xi\frac{2}{\sqrt{\pi}b}e^{-\left(\frac{\xi}{b}\right)^2}\,d\xi &= \frac{2b}{\sqrt{\pi}}\frac{b}{\sqrt{\pi}}\\ &= -\frac{2b^2}{\pi};\end{aligned}$$

e a integral que apresenta um pouco mais de dificuldade é a "primeira":

$$\begin{aligned}\int_{\xi=0}^{\infty}\xi^2\frac{2}{\sqrt{\pi}b}e^{-\left(\frac{\xi}{b}\right)^2}\,d\xi &= b^2\int_{u=0}^{\infty}u^2\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2}\,du\\ &= -\frac{b^2}{2}\int_{u=0}^{\infty}\underbrace{u}_{U}\underbrace{\left(-2u\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2}\,du\right)}_{dV}\\ &= -\frac{b^2}{2}\left[UV\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}V\,dU\right]\\ &= -\frac{b^2}{2}\left[u\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2}\Big|_0^{\infty}-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-u^2}\,du\right]\\ &= \frac{b^2}{2}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathrm{Var}\{X\} = \frac{b^2}{2}-\frac{2b^2}{\pi}+\frac{b^2}{\pi} = b^2\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\right].$$

c) Para calcular a média e o desvio-padrão, eu usei o seguinte programa em *Python*:

```
#!/usr/bin/python
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
# ----------------------------------------------------------------------------
# statuc: estatísticas para Tucuruí
# ----------------------------------------------------------------------------
from math import sqrt
# ----------------------------------------------------------------------------
# Uma rápida rotina para o cálculo de estatísticas
# ----------------------------------------------------------------------------
def stat(x):
   media = 0.0
   dvp = 0.0
   for a in x:
      media += a
   media = media/len(x)
   for a in x:
      dvp += (a - media)**2
   dvp = dvp/(len(x)-1)
   dvp = sqrt(dvp)
   return (media,dvp)
# ----------------------------------------------------------------------------
# o início do programa principal
# ----------------------------------------------------------------------------
x = [34100.0,18000.0,22300.0,27900.0,42500.0,31000.0,20300.0,35900.0,47200.0,
     47600.0,68300.0,36400.0,41500.0]
(media,dvp) = stat(x)
print 'media = %12.0f' % media
print 'dvp   = %12.0f' % dvp
```

Cujo resultado é

$$\begin{aligned}\overline{x} &= 36385,\\ s_* &= 13621.\end{aligned}$$

Agora, o método dos momentos é

$$\begin{aligned}b^2\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\right] &= s_*^2, &\Rightarrow b &= 31955,\\ a+\frac{b}{\sqrt{\pi}} &= \overline{x}, &\Rightarrow a &= 18356.\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

d)

$$
\begin{aligned}
P\left\{\frac{x_{10000}-a}{b} > 2{,}751065\right\} = 0{,}0001 \Rightarrow \\
\frac{x_{10000}-a}{b} &= 2{,}751065 \\
x_{10000} &= a + 2{,}751065b = 18356 + 2{,}751065 \times 31955 = 106266\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{s}^{-1} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada II
P03, 15 Set 2008
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e LEMBRE-SE: COMECE PELAS MAIS FÁCEIS PARA VOCÊ. PROCURE RESOLVER O MAIOR NÚMERO DE ITENS POSSÍVEL, PARA MAXIMIZAR SUA NOTA. MANTENHA-SE CALMA(O), E PENSE UM POUCO EM QUAL SERÁ A SUA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS. Resolva as questões de forma *LIMPA E ORGANIZADA*, *nos espaços designados*. Boa prova.

---

1 (2011-10-02T11:05:08 incluída em matappa.tex)[3,0] Seja $\mathbb{V}$ o conjunto das funções $f(x)$ complexas de uma variável independente x real, tais que a integral

$$\int_{-L/2}^{+L/2} |f(x)|^2 w(x)\,dx$$

existe, com

$$w(x) = \cos\frac{\pi x}{L} \ge 0 \qquad \text{em } -L/2 \le x \le +L/2.$$

Se $f(x), g(x) \in \mathbb{V}$, mostre que

$$\langle f(x), g(x)\rangle \equiv \int_{-L/2}^{+L/2} f^*(x)g(x)w(x)\,dx$$

é um produto interno legítimo, isto é, para $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\langle f, f\rangle &\ge 0;\\
\langle f, g\rangle &= \langle g, f\rangle^*;\\
\langle f, g+h\rangle &= \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle;\\
\langle f, \alpha g\rangle &= \alpha\langle f, g\rangle.
\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a)

$$\begin{aligned}
\langle f, f\rangle &= \int_{-L/2}^{+L/2} f^*(x)f(x)w(x)\,dx\\
&= \int_{-L/2}^{+L/2} |f(x)|^2 w(x)\,dx \ge 0,
\end{aligned}$$

pois $w(x) \ge 0$ em $-L/2 \le x \le +L/2$.
b)

$$\begin{aligned}
\langle f, g\rangle &= \int_{-L/2}^{+L/2} f^*(x)g(x)w(x)\,dx\\
&= \int_{-L/2}^{+L/2} \left[f(x)g^*(x)w(x)\right]^*\,dx
\end{aligned}$$

(Note que $w(x) \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}
&= \left[\int_{-L/2}^{+L/2} g^*(x)f(x)w(x)\,dx\right]^*\\
&= \langle g, f\rangle^*.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

c)

$$
\begin{aligned}
\langle f, g+h\rangle &= \int_{-L/2}^{+L/2} f^*(x)[g(x)+h(x)]w(x)\,dx \\
&= \int_{-L/2}^{+L/2} f^*(x)g(x)w(x)\,dx + \int_{-L/2}^{+L/2} f^*(x)h(x)w(x)\,dx \\
&= \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle.
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
\langle f, \alpha g\rangle &= \int_{-L/2}^{+L/2} f^*(x)[\alpha g(x)]w(x)\,dx \\
&= \alpha \int_{-L/2}^{+L/2} f^*(x)g(x)w(x)\,dx \\
&= \alpha\langle f, g\rangle \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [3,0] (2011-10-02T11:09:42 incluída em matappa.tex) Para o mesmo produto interno da questão **1**, verifique se o conjunto de funções

$$e_n(x) = e^{i\frac{2\pi nx}{L}}, \qquad -L/2 \le x \le +L/2, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2\ \pm 3, \ldots$$

é ortogonal ou não. Sugestão: fazendo

$$w(x) = \cos\frac{\pi x}{L} = \frac{e^{i\frac{\pi x}{L}} + e^{-i\frac{\pi x}{L}}}{2},$$

as integrais definidoras dos produtos internos ficam mais fáceis de calcular.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

É necessário verificar se $\langle e_m(x), e_n(x)\rangle = 0$ para $m \ne n$:

$$\begin{aligned}
\langle e_m(x), e_n(x)\rangle &= \int_{-L/2}^{+L/2} e^{-i\frac{2\pi mx}{L}} e^{+i\frac{2\pi nx}{L}} \frac{e^{i\frac{\pi x}{L}} + e^{-i\frac{\pi x}{L}}}{2}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{+L/2} \left[e^{-i\frac{2\pi mx}{L}} e^{+i\frac{2\pi nx}{L}} e^{i\frac{\pi x}{L}} + e^{-i\frac{2\pi mx}{L}} e^{+i\frac{2\pi nx}{L}} e^{-i\frac{\pi x}{L}} \right] dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{+L/2} \left[e^{i\frac{2\pi}{L}[(n-m)+1/2]x} + e^{i\frac{2\pi}{L}[(n-m)-1/2]x} \right] dx \\
&= \frac{L}{2\pi i[(n-m)+1/2]} \left.\frac{e^{i\frac{2\pi}{L}[(n-m)+1/2]x}}{2}\right|_{-L/2}^{+L/2} + \frac{L}{2\pi i[(n-m)-1/2]} \left.\frac{e^{i\frac{2\pi}{L}[(n-m)-1/2]x}}{2}\right|_{-L/2}^{+L/2}
\end{aligned}$$

Neste ponto, meramente por conveniência, use a máxima de Jacques Chambriard: *simplifique* a álbegra, concentrando-se no essencial. Faça

$$\begin{aligned}
\alpha &= \pi\left[(n-m)+1/2\right]; \\
\beta &= \pi\left[(n-m)-1/2\right].
\end{aligned}$$

O produto interno torna-se mais palatável:

$$\begin{aligned}
\langle e_m(x), e_n(x)\rangle &= \frac{L}{i2\alpha} \left.\frac{e^{i2\alpha x/L}}{2}\right|_{-L/2}^{L/2} + \frac{L}{i2\beta} \left.\frac{e^{i2\beta x/L}}{2}\right|_{-L/2}^{L/2} \\
&= \frac{L}{i2\alpha}\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2} + \frac{L}{i2\beta}\frac{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}{2} \\
&= \frac{L}{2\alpha}\operatorname{sen}\alpha + \frac{L}{2\beta}\operatorname{sen}\beta.
\end{aligned}$$

Agora, a ameixa no pudim: observe que α e β correspondem a um número inteiro $(n-m)$ de meias-voltas no círculo trigonométrico, $\pm\ 1/4$ de volta. Portanto, $|\operatorname{sen}\alpha| = |\operatorname{sen}\beta| = 1$, mas $\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}\beta$, sempre. Segue-se que

$$\langle e_m(x), e_n(x)\rangle = \frac{L\operatorname{sen}\alpha}{2}\left[\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right] \ne 0 \qquad \textit{sempre},$$

e o conjunto dos $e_n(x)$ *não* é ortogonal para este produto interno ∎

Continue a solução no verso ⟹

3 (2011-10-23T12:44:12 incluída em matappa.tex) [4,0] Se

$$f(x) = \cos x, \qquad 0 \le x \le \pi/2,$$

e se $f_I(x)$ é a extensão *ímpar* de $f(x)$ entre $-\pi/2$ e $+\pi/2$, obtenha a série de Fourier de $f_I(x)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Como f_I é ímpar, a série de Fourier é simplesmente

$$\begin{aligned}
f_I(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{\pi}, \\
B_n &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} f_I(x) \operatorname{sen}(2nx)\, dx, \\
&= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos x \operatorname{sen}(2nx)\, dx \\
&= \frac{8n}{(4n^2-1)\pi} \blacksquare
\end{aligned}$$

Veja como se calcula esta integral com Maxima:

```
(%i1) declare([n],integer) ;
(%o1)                           done
(%i2) f : cos(x)*sin(2*n*x) ;
(%o2)                      cos(x) sin(2 n x)
(%i3) integrate(f,x,0,%pi/2);
                             1         1
(%o3)                     ------- + -------
                          4 n + 2   4 n - 2
(%i4) ratsimp(%);
                               2 n
(%o4)                        --------
                                2
                             4 n  - 1
```

Continue a solução no verso ⟹

TT010 Matemática Aplicada II
P04, 26 Set 2008
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e LEMBRE-SE: COMECE PELAS MAIS FÁCEIS PARA VOCÊ. PROCURE RESOLVER O MAIOR NÚMERO DE ITENS POSSÍVEL, PARA MAXIMIZAR SUA NOTA. MANTENHA-SE CALMA(O), E PENSE UM POUCO EM QUAL SERÁ A SUA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS. Resolva as questões de forma *LIMPA E ORGANIZADA*, *nos espaços designados*. Boa prova.

---

1 [60] **(Esta questão é obrigatória)** Dada a equação diferencial

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \qquad \phi(x,0) = H(x) - H(x-a),$$

onde $H(x)$ é a função de Heaviside:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

a) [50] obtenha $\widehat{\phi}(k,t) = \mathscr{F}\{\phi(x,t)\}$;

b) [10] escreva $\phi(x,t)$ como a anti-transformada de Fourier de $\widehat{\phi}(k,t)$; **não tente resolver a integral!**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) A transformada da equação diferencial é

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{\phi}}{dt} + ikc\widehat{\phi} &= 0 \\ \frac{d\widehat{\phi}}{\widehat{\phi}} &= -ikcdt \\ \widehat{\phi}(k,t) &= \widehat{\phi}(k,0)e^{-ikct} \end{aligned}$$

A transformada de Fourier da condição inicial é

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\{c(x,0)\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} c(x,0)e^{-ikx}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^a e^{-ikx}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi ik}\left[1 - e^{-iak}\right]. \end{aligned}$$

Portanto, a transformada de Fourier da solução é

$$\widehat{\phi}(k,t) = \frac{1}{2\pi ik}\left[1 - e^{-iak}\right]e^{-ikct}.$$

b) A solução será

$$\phi(x,t) = \int_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi ik}\left[1 - e^{-iak}\right]e^{-ikct}e^{ikx}\,dk.$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [40] **(Você pode resolver esta questão *ou* a questão 3; deixe claro qual das duas você quer que seja considerada: somente uma das duas (2 ou 3) será corrigida.)** Prove que

$$H(x) = \int_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i k} e^{ikx}\, dk$$

por meio dos seguintes passos:

a) **(Justifique!)**

$$\mathscr{F}\left\{\delta(x)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi};$$

b) **(Justifique!)**

$$\frac{1}{2\pi} = \mathscr{F}\left\{\delta(x)\right\} = ik\mathscr{F}\left\{H(x)\right\} = ik\widehat{H}(k).$$

Nos passos acima, $\delta(x)$ é a distribuição delta de Dirac.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
(a) é uma conseqüência das propriedades da δ de Dirac, e (b) da propriedade da transformada de Fourier da derivada; de (b):

$$\widehat{H}(k) = \frac{1}{2\pi i k};$$
$$H(x) = \int_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i k} e^{ikx}\, dk \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [40] **(Você pode resolver esta questão *ou* a questão 2; deixe claro qual das duas você quer que seja considerada: somente uma das duas (2 ou 3) será corrigida)** Use o resultado da questão 2 para provar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i k} \left[e^{ik(x-ct)} - e^{ik(x-ct-a)} \right] dk = H(x-ct) - H(x-ct-a);$$

e mais ainda (**Resposta obrigatória**): qual a conexão deste resultado com a Questão 1?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Basta substituir x por $x - ct$ e $x - ct - a$ na questão **3**. De volta à questão **1**,

$$\begin{aligned}\phi(x,t) &= \int_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i k} \left[1 - e^{-iak}\right] e^{-ikct} e^{ikx}\, dk.\\ &= \int_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i k} \left[e^{ik(x-ct)} - e^{ik(x-ct-a)} \right] dk\\ &= H(x-ct) - H(x-ct-a) \blacksquare\end{aligned}$$

Portanto, as questões **2** e **3** dão a chave da inversão da transformada de Fourier necessária para a obtenção da solução da questao **1**. A solução é uma simples translação da condição inicial $H(x) - H(x-a)$ com celeridade c: uma solução de onda clássica, ou ainda: uma simples advecção com velocidade c da condição inicial. O que é óbvio (*a posteriori*, pelo menos), já que a equação diferencial da questão **1** não possui termos difusivos.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada II
P05, 17 Out 2008
Prof. Nelson Luís Dias

NOME: GABARITO

0

Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e LEMBRE-SE: COMECE PELAS MAIS FÁCEIS PARA VOCÊ. PROCURE RESOLVER O MAIOR NÚMERO DE ITENS POSSÍVEL, PARA MAXIMIZAR SUA NOTA. MANTENHA-SE CALMA(O), E PENSE UM POUCO EM QUAL SERÁ A SUA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS. Resolva as questões de forma *LIMPA E ORGANIZADA*, *nos espaços designados*. Boa prova.

---

1 [60] Considere a equação diferencial

$$x\frac{dy}{dx} + y = f(x), \qquad y(0) = 0.$$

a) [20] Se x tem dimensão de comprimento ($[\![x]\!] = L$), e y tem dimensão de massa ($[\![y]\!] = M$), qual é a dimensão de $f(x)$?

b) [40] Obtenha a função de Green deste problema (Sugestão: re-escreva a equação diferencial de tal forma que o coeficiente de dy/dx seja 1).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) Evidentemente, $[\![f(x)]\!] = [\![y]\!] = M$.
b)

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{d\xi} + \frac{y}{\xi} &= \frac{f(\xi)}{\xi},\\
G(x,\xi)\frac{dy}{d\xi} + \frac{G(x,\xi)y}{\xi} &= \frac{G(x,\xi)f(\xi)}{\xi},\\
\int_{\xi=0}^{\infty} G(x,\xi)\frac{dy}{d\xi} + \int_{\xi=0}^{\infty}\frac{G(x,\xi)y}{\xi} &= \int_{\xi=0}^{\infty}\frac{G(x,\xi)f(\xi)}{\xi},\\
G(x,\xi)y(\xi)\Big|_0^{\infty} - \int_{\xi=0}^{\infty} y\frac{dG}{d\xi} + \int_{\xi=0}^{\infty}\frac{G(x,\xi)y}{\xi}\,d\xi &= \int_{\xi=0}^{\infty}\frac{G(x,\xi)f(\xi)}{\xi}
\end{aligned}$$

Neste ponto, como sempre, imponho $\lim_{\xi\to\infty} G(x,\xi) = 0$; note que a condição inicial é $y(0) = 0$, o que simplifica um pouco as coisas. Prosseguindo,

$$\begin{aligned}
\int_{\xi=0}^{\infty} y\left[-\frac{dG(x,\xi)}{d\xi} + \frac{G(x,\xi)}{\xi}\right]d\xi &= \int_{\xi=0}^{\infty}\frac{G(x,\xi)f(\xi)}{\xi}\,d\xi,\\
-\frac{dG(x,\xi)}{d\xi} + \frac{G(x,\xi)}{\xi} &= \delta(\xi - x).
\end{aligned}$$

A forma mais rápida de obter G é pelo método da variação das constantes. Procuro a solução da equação homogênea:

$$\begin{aligned}
-\frac{dh}{d\xi} + \frac{h}{\xi} &= 0,\\
\frac{dh}{d\xi} &= \frac{h}{\xi},\\
\frac{dh}{h} &= \frac{d\xi}{\xi},\\
h(\xi) &= A\xi,
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

(onde A é uma constante em relação a ξ), e tento

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi) &= A(x,\xi)\xi,\\
-\left[\xi\frac{dA}{d\xi} + A\right] + \frac{A\xi}{\xi} &= \delta(\xi - x),\\
-\xi\frac{dA}{d\xi} &= \delta(\xi - x),\\
\frac{dA}{d\xi} &= -\frac{\delta(\xi - x)}{\xi},\\
\int_{u=0}^{\xi} \frac{dA}{du}\, du &= -\int_{u=0}^{\xi} \frac{\delta(u - x)}{u}\, du\\
A(x,\xi) &= A(x,0) - \frac{H(\xi - x)}{x},\\
G(x,\xi) &= \left[A(x,0) - \frac{H(\xi - x)}{x}\right]\xi.
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
0 = G(x,\infty) = [A(x,0) - 1/x]\,\infty \qquad &\Rightarrow\\
A(x,0) = 1/x,&\\
G(x,\xi) = [1 - H(\xi - x)]\frac{\xi}{x}\ \blacksquare&
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [40] Encontre os autovalores e as autofunções do problema

$$y'' + \lambda y = 0,\ y(0) = y(1),\ y'(0) = y'(1).$$

Considere apenas $\lambda > 0$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Segundo o enunciado, basta estudar o caso $\lambda > 0$. A equação característica é

$$r^2 + \lambda = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} y(x) &= A\cos\sqrt{\lambda}x + B\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x, \\ y'(x) &= \sqrt{\lambda}\left[-A\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x + B\cos\sqrt{\lambda}x\right]. \end{aligned}$$

A imposição das condições de contorno produz:

$$\begin{aligned} y(0) = y(1) \quad &\Rightarrow \quad A = A\cos\sqrt{\lambda} + B\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}, \\ y'(0) = y'(1) \quad &\Rightarrow \quad \cancel{\sqrt{\lambda}}B = \cancel{\sqrt{\lambda}}\left[-A\operatorname{sen}\sqrt{\lambda} + B\cos\sqrt{\lambda}\right]. \end{aligned}$$

O sistema de equações em A, B é

$$\begin{bmatrix} \cos\sqrt{\lambda} - 1 & \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} \\ -\operatorname{sen}\sqrt{\lambda} & \cos\sqrt{\lambda} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como eu desejo que $(A, B) \neq (0, 0)$, o determinante da matriz acima deve ser nulo para que haja outras soluções além da trivial:

$$\begin{aligned} \cos^2\sqrt{\lambda} - 2\cos\sqrt{\lambda} + 1 + \operatorname{sen}^2\sqrt{\lambda} &= 0, \\ 2[1 - \cos\sqrt{\lambda}] &= 0, \\ \cos\sqrt{\lambda} &= 1, \\ \sqrt{\lambda} &= 2n\pi, \\ \lambda_n &= 4n^2\pi^2. \end{aligned}$$

Um aluno apressado escreveria para as autofunções:

$$y_n(x) = A\cos 2n\pi x + B\operatorname{sen} 2n\pi x;$$

se houvesse uma única autofunção $y_n(x)$ para cada λ_n, deveria então ser possível escrever B como um múltiplo de A, mas qualquer tentativa neste sentido falha. A conclusão é que cada autovalor λ_n possui 2 autofunções!:

$$\lambda_n = 4n^2\pi^2 \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} y_{1n} = \cos 2n\pi x, \\ y_{2n} = \operatorname{sen} 2n\pi x \ \blacksquare \end{cases}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada II
P06, 31 Out 2008
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e LEMBRE-SE: COMECE PELAS MAIS FÁCEIS PARA VOCÊ. PROCURE RESOLVER O MAIOR NÚMERO DE ITENS POSSÍVEL, PARA MAXIMIZAR SUA NOTA. MANTENHA-SE CALMA(O), E PENSE UM POUCO EM QUAL SERÁ A SUA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS. Resolva as questões de forma *LIMPA E ORGANIZADA*, *nos espaços designados*. Boa prova.

---

1 [50] Utilizando o método das características, resolva:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + x^2 \frac{\partial u}{\partial y} = -xu; \qquad u(0, y) = f(y).$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Calculo a derivada total,

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds},$$

e comparo com a equação diferencial original, obtendo:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{ds} &= 1 \Rightarrow x \equiv s;\\
\frac{dy}{ds} &= x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^2 \Rightarrow y = \xi + \frac{x^3}{3};\\
\frac{du}{ds} &= -xu \Rightarrow \frac{du}{dx} = -xu.
\end{aligned}$$

Em $x = 0$, $y = \xi$, donde a integral da terceira equação acima é

$$\begin{aligned}
\int_{u(0,y)=f(\xi)}^{u(x,y)} \frac{dv}{v} &= -\int_{z=0}^{x} z\,dz = -\frac{x^2}{2};\\
\ln \frac{u(x,y)}{f(\xi)} &= -\frac{x^2}{2};\\
u(x,y) &= f(\xi)\exp(-\frac{x^2}{2});\\
u(x,y) &= f(y - \frac{x^3}{3})\exp(-\frac{x^2}{2}) \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [50] Utilizando obrigatoriamente o método de separação de variáveis, $\phi(x,t) = X(x)T(t)$, resolva

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \phi \frac{\partial \phi}{\partial x}; \qquad \phi(0,t) = 0, \qquad \phi(1,0) = 1.$$

Sugestão: a solução é muito parecida com a solução da equação de Boussinesq vista em aula, só que mais fácil.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Separando-se as variáveis, obtém-se:

$$\begin{aligned} X\frac{dT}{dt} &= XT\left[T\frac{dX}{dx}\right], \\ \frac{1}{T^2}\frac{dT}{dt} &= \frac{dX}{dx} = c_1. \end{aligned}$$

Resolvendo primeiro em T:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T^2}\frac{dT}{dt} &= c_1, \\ \frac{dT}{T^2} &= c_1 dt, \\ -\frac{1}{T} &= c_1 t + c_2, \\ T &= \frac{-1}{c_1 t + c_2}. \end{aligned}$$

Resolvendo X:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dx} &= c_1, \\ X &= c_1 x + c_3. \end{aligned}$$

A solução será do tipo

$$\begin{aligned} \phi = XT &= -\frac{c_1 x + c_3}{c_1 t + c_2} \\ &= -\frac{x + c_3/c_1}{t + c_2/c_1} \\ &= -\frac{x+a}{t+b}. \end{aligned}$$

Neste ponto, note que há apenas 2 graus de liberdade, representados pelas constantes a e b, e que correspondem à única condição de contorno e à única condição inicial dadas. Impondo cada uma delas:

$$\begin{aligned} \phi(0,t) = 0 &\Rightarrow -\frac{a}{t+b} = 0 \Rightarrow a = 0; \\ \phi(1,0) = 1 &\Rightarrow -\frac{1}{b} = 1 \Rightarrow b = -1. \end{aligned}$$

Donde

$$\phi(x,t) = -\frac{x}{t-1} = \frac{x}{1-t} \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada II
P07, 21 Nov 2008
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e LEMBRE-SE: COMECE PELAS MAIS FÁCEIS PARA VOCÊ. PROCURE RESOLVER O MAIOR NÚMERO DE ITENS POSSÍVEL, PARA MAXIMIZAR SUA NOTA. MANTENHA-SE CALMA(O), E PENSE UM POUCO EM QUAL SERÁ A SUA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS. Resolva as questões de forma *LIMPA E ORGANIZADA*, *nos espaços designados*. Boa prova.

---

1 [50] Utilizando obrigatoriamente o método de separação de variáveis, resolva:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad u(x,0) = 0, \qquad u(0,t) = u_0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Note que as condições de contorno em x não são homogêneas. Isto pode ser facilmente resolvido, entretanto, com

$$\phi(x,t) = u(x,t) - u_0; \qquad \Rightarrow \begin{cases} \phi(0,t) = 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial x}(L,t) = 0. \end{cases}$$

A condição inicial muda, entretanto, para

$$\phi(x,0) = -u_0.$$

A equação diferencial não muda:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

Separando as variáveis, $\phi(x,t) = X(x)T(t)$,

$$XT' = \alpha^2 T X'',$$
$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda.$$

Discussão de sinais: $\lambda = k^2 > 0$:

$$\begin{aligned} X'' - k^2 X &= 0, \\ X &= A\cosh(kx) + B\,\mathrm{senh}(kx) \\ X' &= A\,\mathrm{senh}(kx) + B\cosh(kx) \\ X(0) = 0 &\Rightarrow A = 0, \\ X'(L) = 0 &\Rightarrow B\cosh(kL) = 0 \Rightarrow B = 0. \end{aligned}$$

A única solução possível é a trivial, $X \equiv 0$, e portanto $\lambda > 0$ não serve.

$\lambda = 0$:

$$\begin{aligned} X'' &= 0, \\ X' &= A, \\ X &= Ax + B \\ X(0) = 0 &\Rightarrow B = 0, \\ X'(L) = 0 &\Rightarrow A = 0. \end{aligned}$$

Novamente, somente a solução trivial é possível, e $\lambda = 0$ não serve.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

$\lambda = -k^2 < 0$:

$$
\begin{aligned}
X'' + k^2 X &= 0,\\
X &= A\cos(kx) + B\,\mathrm{sen}(kx),\\
X' &= -A\,\mathrm{sen}(kx) + B\cos(kx),\\
X(0) = 0 &\Rightarrow A = 0,\\
X'(L) = 0 &\Rightarrow B\cos(kL) = 0,\\
kL &= (2n-1)\frac{\pi}{2}, n = 1, 2, \ldots,\\
X_n(x) &= \mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right).
\end{aligned}
$$

A equação diferencial em T será

$$
\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= -T\left(\frac{(2n-1)\pi\alpha}{2L}\right)^2,\\
\frac{dT}{T} &= -\left(\frac{(2n-1)\pi\alpha}{2L}\right)^2 dt,\\
T(t) &= T_{0n}\exp\left[-\left(\frac{(2n-1)\pi\alpha}{2L}\right)^2 t\right].
\end{aligned}
$$

A solução será do tipo

$$
\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_{0n}\exp\left[-\left(\frac{(2n-1)\pi\alpha}{2L}\right)^2 t\right]\mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right).
$$

Em particular, para $t = 0$,

$$
\begin{aligned}
-u_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} T_{0n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right),\\
-u_0\cos\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_{0n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right),\\
-\int_{x=0}^{L} u_0\cos\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right)dx &= \sum_{n=1}^{\infty} T_{0n}\int_{x=0}^{L}\mathrm{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)dx,\\
-\int_{x=0}^{L} u_0\,\mathrm{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right)dx &= T_{0m}\int_{x=0}^{L}\left[\mathrm{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right)\right]^2 dx.
\end{aligned}
$$

As duas integrais são

$$
\begin{aligned}
\int_{x=0}^{L}\mathrm{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right)dx &= \frac{2L}{\pi(2m-1)},\\
\int_{x=0}^{L}\left[\mathrm{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right)\right]^2 dx &= \frac{L}{2},
\end{aligned}
$$

donde, finalmente,

$$
\begin{aligned}
T_{0n} &= -\frac{4u_0}{\pi(2n-1)},\\
u(x,t) &= u_0 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4u_0}{\pi(2n-1)}\exp\left[-\left(\frac{(2n-1)\pi\alpha}{2L}\right)^2 t\right]\mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right).
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [50] O processo estocástico de afluência de água a um reservatório de controle de cheias urbano é modelado de forma muito simplificada da seguinte forma:

- o reservatório sempre tem $V = 0$ em $t = 0$, quando "começa a chover";
- o tempo é discretizado em intervalos $j\Delta t,\ j = 0, 1, 2, 3, \ldots$;
- o volume do reservatório é discretizado em intervalos $i\Delta v,\ i = 0, 1, 2, \ldots, m$; portanto, o volume máximo de água no reservatório é $m\Delta v$;
- durante cada intervalo de tempo Δt, a afluência ao reservatório pode ser Δv com probabilidade p, ou 0 com probabilidade q;
- as afluências em cada intervalo são variáveis aleatórias independentes umas das outras;
- até que o reservatório encha, a defluência do reservatório é 0.

a) [10] Se $V(j)$ é (a variável aleatória) volume do reservatório no instante $j\Delta t$, qual é a probabilidade de que $V(m) = m\Delta v$?

b) [10] Idem: qual é a probabilidade de que $V(m) = 0$?

c) [30] Se $P\{V(j) = i\Delta v\}$ é a probabilidade de que o volume no instante $j\Delta t$ seja igual a $i\Delta v$, calcule $P\{V(m) = n\Delta v\}$, para $0 \le n \le m$.

Sugestão: a) e b) podem ser calculadas com um raciocínio simples de probabilidade de ocorrência de uma sucessão de eventos independentes *ou* como um caso particular de c) (use o que você preferir); c) pode ser calculado definindo a variável aleatória $X_j = 0$ ou Δv com probabilidade q e p respectivamente ($p + q = 1$); fazendo $V(m) = \sum_{j=1}^{m} X_j$; e manipulando as respectivas funções características.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a) Para que $V(m) = m\Delta v$, é necessário que *todas* as afluências entre $k = 1\Delta t$ e $k = m\Delta t$ sejam iguais a Δv; portanto: $P\{V(m) = m\Delta v\} = p^m$.

b) Para que $V(m) = 0\Delta v$, é necessário que *todas* as afluências entre $k = 1\Delta t$ e $k = m\Delta t$ sejam iguais a 0; portanto: $P\{V(m) = 0\} = q^m$.

c) Para que $V(m) = n$, é necessário que haja n afluências Δv, e $m - n$ afluências 0; isto pode ocorrer de $\binom{m}{n}$ maneiras diferentes e portanto

$$P\{V(m) = n\} = \binom{m}{n} p^m q^{m-n};$$

este é um raciocínio envolvendo apenas análise combinatória, bem rápido. Para quem quiser usar funções características, o raciocínio é o seguinte: para simplificar a notação, defino

$$\pi_n \equiv P\{V(m) = n\Delta v\}$$

(estou usando π porque P e p já têm outros significados, e não quero confundi-los); e a função característica de $V(m)$ é

$$g_{V(m)}(\omega) = \left\langle e^{i\omega V(m)} \right\rangle = \sum_{n=0}^{m} \pi_n e^{i\omega n\Delta v}. \tag{A}$$

Por outro lado, a função característica de X (para qualquer j, graças à independência) é

$$g_X(\omega) = \left\langle e^{i\omega X} \right\rangle = p e^{i\omega\Delta v} + q e^{i\omega 0} = p e^{i\omega\Delta v} + q.$$

Continue a solução no verso ⟹

Agora,

$$
\begin{aligned}
V(m) &= \sum_{j=1}^{m} X_j, \\
g_{V(m)} &= \left\langle e^{i\omega V(m)} \right\rangle \\
&= \left\langle e^{i\omega \sum_{j=1}^{m} X_j} \right\rangle \\
&= \left\langle \prod_{j=1}^{m} e^{i\omega X} \right\rangle \\
&= \prod_{j=1}^{m} \left\langle e^{i\omega X} \right\rangle \\
&= \prod_{j=1}^{m} \left[p e^{i\omega \Delta v} + q \right] \\
&= \left[p e^{i\omega \Delta v} + q \right]^m \\
&= \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} p^n q^{m-n} e^{i\omega n \Delta v}. \qquad \text{(B)}
\end{aligned}
$$

Comparando (A) e (B),

$$
\pi_n = \binom{m}{n} p^n q^{m-n} \ \blacksquare
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada II
F, 2008-12-01
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: GABARITO

0

Assinatura: ______________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e LEMBRE-SE: COMECE PELAS MAIS FÁCEIS PARA VOCÊ. PROCURE RESOLVER O MAIOR NÚMERO DE ITENS POSSÍVEL, PARA MAXIMIZAR SUA NOTA. MANTENHA-SE CALMA(O), E PENSE UM POUCO EM QUAL SERÁ A SUA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS. Resolva as questões de forma *LIMPA E ORGANIZADA*, *nos espaços designados*. Boa prova.

---

1 [25] Sabendo que a função densidade de probabilidade (f.d.p.) da variável aleatória X é

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2\right],$$

e que

$$Y = e^X,$$

obtenha a f.d.p. de Y.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A relação $Y = g(X)$ é biunívoca e crescente; portanto,

$$\begin{aligned} f_Y(y)\,dy &= f_X(x)\,dx, \\ f_Y(y) &= \frac{dx}{dy} f_X(x(y)), \\ x = \ln(y); &\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}; \\ f_Y(y) &= \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\ln(y)-\mu)^2/\sigma^2\right] \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [25] Considere a série de Fourier complexa

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{2in\pi x}{L}}, \qquad -L/2 \le x \le +L/2;$$

obtenha os c_n's, e consequentemente a série, para

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -L/2 \le x < 0\,; \\ 1, & 0 \le x \le +L/2. \end{cases}$$

Sugestão: Como sempre, multiplique ambos os lados da série por $e^{-\frac{2im\pi x}{L}}$, integre termo a termo, aplique a ortogonalidade das exp's, etc..

SOLUÇÃO DA QUESTÃO: Como sempre,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{2in\pi x}{L}}, \\ \int_{-L/2}^{+L/2} f(x) e^{-\frac{2im\pi x}{L}}\,dx &= \int_{-L/2}^{+L/2} e^{-\frac{2im\pi x}{L}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{2in\pi x}{L}}\,dx \\ \int_{-L/2}^{+L/2} f(x) e^{-\frac{2im\pi x}{L}}\,dx &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{-L/2}^{+L/2} e^{\frac{2i(n-m)\pi x}{L}}\,dx \end{aligned}$$

As exp's são ortogonais; repetindo o que já foi feito muitas vezes em sala de aula,

$$\begin{aligned} \int_{-L/2}^{+L/2} e^{\frac{2i(n-m)\pi x}{L}}\,dx &= \frac{L}{2i(n-m)\pi} \int_{-L/2}^{+L/2} e^{\frac{2i(n-m)\pi x}{L}} \frac{2i(n-m)\pi x}{L}\,dx \\ &= \frac{L}{2i(n-m)\pi}\left[e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}\right] = 0, \qquad n \ne m. \end{aligned}$$

Para $n = m$, a integral é muito simples:

$$\int_{-L/2}^{+L/2} dx = L.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^{+L/2} e^{-\frac{2im\pi x}{L}}\,dx &= c_m L, \\ -\frac{L}{2im\pi} \int_0^{+L/2} e^{-\frac{2im\pi x}{L}} \frac{2im\pi x}{L}\,dx &= c_m L, \\ -\frac{L}{2im\pi}\left[e^{-im\pi} - 1\right] &= c_m L, \\ -\frac{1}{2im\pi}\left[e^{-im\pi} - 1\right] &= c_m. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2in\pi}\left[1 - e^{-in\pi}\right] e^{\frac{2in\pi x}{L}} \;\blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Dada a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} + \frac{t}{T^2} y = \frac{af(t)}{T},$$

onde as dimensões físicas das variáveis são $[\![y]\!] = [\![f]\!]$, e $[\![T]\!] = [\![t]\!]$,

a) [10] Quem é $[\![a]\!]$?

b) [15] Obtenha a função de Green $G(t,\tau)$ da equação diferencial.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a) Compare o primeiro termo do lado esquerdo com o lado direito:

$$\frac{[\![y]\!]}{[\![t]\!]} = [\![a]\!] \frac{[\![f]\!]}{[\![T]\!]} \Rightarrow [\![a]\!] = 1 \blacksquare$$

b) Como sempre:

$$\begin{aligned}
G(t,\tau)\frac{dy}{d\tau} + G(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}y(\tau) &= \frac{af(\tau)G(t,\tau)}{T}, \\
\int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau)\frac{dy}{d\tau}\,d\tau + \int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}y(\tau)\,d\tau &= \int_{\tau=0}^{\infty} \frac{af(\tau)G(t,\tau)}{T}\,d\tau, \\
G(t,\tau)y(\tau)\Big|_{\tau=0}^{\infty} - \int_{\tau=0}^{\infty} y(\tau)\frac{dG(t,\tau)}{d\tau}\,d\tau + \int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}y(\tau)\,d\tau &= \int_{\tau=0}^{\infty} \frac{af(\tau)G(t,\tau)}{T}\,d\tau.
\end{aligned}$$

Imponho

$$\lim_{\tau\to\infty} G(t,\tau)y(\tau) = 0$$

e rearranjo os termos restantes:

$$-G(t,0)y(0) + \int_{\tau=0}^{\infty} y(\tau)\left[-\frac{dG}{d\tau} + G(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}\right]d\tau = \int_{\tau=0}^{\infty} \frac{af(\tau)G(t,\tau)}{T}\,d\tau.$$

O problema torna-se

$$-\frac{dG}{d\tau} + G(t,\tau)\frac{\tau}{T^2} = \delta(\tau - t), \qquad G(t,\infty) = 0.$$

Primeiro, procuro uma solução do problema homogêneo:

$$\begin{aligned}
-\frac{dh}{d\tau} + h(t,\tau)\frac{\tau}{T^2} &= 0, \\
\frac{dh}{d\tau} &= \frac{h\tau}{T^2}, \\
\frac{dh}{h} &= \frac{\tau d\tau}{T^2}, \\
\ln\frac{h(t,\tau)}{h(t,0)} &= \frac{\tau^2}{2T^2}, \\
h(t,\tau) &= h(t,0)\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right].
\end{aligned}$$

Agora procuro a solução para G pelo método de variação de parâmetros:

$$\begin{aligned}
G(t,\tau) &= A(t,\tau)\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right] \Rightarrow \\
-\frac{dG(t,\tau)}{d\tau} &= -\frac{dA(t,\tau)}{d\tau}\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right] - A(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right] \Rightarrow \\
-\frac{dA(t,\tau)}{d\tau}\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right] - A(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right] &+ A(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right] = \delta(\tau - t)
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Simplificando:

$$
\begin{aligned}
\frac{dA(t,\xi)}{d\xi} &= -\exp\left[-\frac{\xi^2}{2T^2}\right]\delta(\xi - t);\\
A(t,\tau) - A(t,0) &= \int_{\xi=0}^{\tau} -\exp\left[-\frac{\xi^2}{2T^2}\right]\delta(\xi - t)\,d\xi;\\
A(t,\tau) &= A(t,0) - H(\tau - t)\exp\left[-\frac{t^2}{2T^2}\right];\\
G(t,\tau) &= \exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right]\left[A(t,0) - H(\tau - t)\exp\left(-\frac{t^2}{2T^2}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Para que $G(t,\infty) = 0$, é necessário que

$$
A(t,0) = \exp\left(-\frac{t^2}{2T^2}\right).
$$

Finalmente,

$$
G(t,\tau) = [1 - H(\tau - t)]\exp\left(\frac{\tau^2 - t^2}{2T^2}\right) \blacksquare
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] Considere o retângulo $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$; a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \lambda \phi, \qquad \phi(0,y) = \phi(a,y) = \phi(x,0) = \phi(x,b) = 0$$

é um problema de autovalores. Utilizando o método de separação de variáveis, $\phi(x,y) = X(x)Y(y)$, mostre que os autovalores são

$$\lambda_{mn} = -\pi^2 \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right],$$

e obtenha as autofunções $\phi_{mn}(x,y)$ correspondentes.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Fazendo-se $\phi(x,y) = X(x)Y(y)$ e substituindo-se na equação diferencial parcial, obtém-se

$$X''Y + Y''X = \lambda XY,$$
$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \lambda.$$

Note que as equações em X e Y *ainda* não estão separadas. O enunciado, entretanto, dá a sugestão óbvia: fazer $\lambda = \lambda_x + \lambda_y$, de tal forma que

$$\frac{X''}{X} = \lambda_x \qquad \text{e} \qquad \frac{Y''}{Y} = \lambda_y$$

separadamente. A tradicional discussão de sinais leva a $\lambda_x = -k^2 < 0$; substituindo-se na equação diferencial, tem-se

$$X'' + k^2 X = 0, \qquad X(0) = X(a) = 0$$

A solução geral é

$$X(x) = A\cos(kx) + B\,\mathrm{sen}(kx)$$

donde

$$A = 0,$$
$$\mathrm{sen}(ka) = 0 \Rightarrow ka = m\pi \Rightarrow k = \frac{m\pi}{a}, \qquad \text{isto é:}$$
$$\lambda_x = -k^2 = -\pi^2 \left(\frac{m}{a}\right)^2,$$
$$X(x) = \mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right).$$

O procedimento em Y é rigorosamente igual:

$$\lambda_y = -\pi^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2; \qquad Y(x) = \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Finalmente,

$$\lambda_{mn} = -\pi^2 \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right],$$

são os autovalores, e

$$\phi_{mn}(x,y) = \mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

são as autofunções ■

Continue a solução no verso ⟹