TT009 Matemática Aplicada I
P01, 14 Mar 2006
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ______________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e LEMBRE-SE: COMECE PELAS MAIS FÁCEIS PARA VOCÊ. PROCURE RESOLVER O MAIOR NÚMERO DE ITENS POSSÍVEL, PARA MAXIMIZAR SUA NOTA. MANTENHA-SE CALMA(O), E PENSE UM POUCO EM QUAL SERÁ A SUA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS. Resolva as questões de forma *LIMPA E ORGANIZADA*, *nos espaços designados.* Boa prova.

Não se esqueça da notação de vetores:

1. com uma seta sobre a letra: $\vec{\imath}$ ou $\vec{a}$ (esta é a forma mais comum entre os físicos) ou
2. com um til *sob* a letra: $\underset{\sim}{i}$, ou $\underset{\sim}{a}$ (esta é a forma mais popular entre os engenheiros, e é a minha preferida),

e garanta seus pontos nas questões ☨

1 [3,0] A notação indicial de Einstein consiste em subentender um somatório todas as vezes em que um índice é repetido (aparece duas vezes) em uma expressão envolvendo um produto. Dada a expressão:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \epsilon_{ijk} a_i b_j \boldsymbol{e}_k,$$

escreva **explicitamente** os somatórios.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Os alunos que "abriram" corretamente o produto vetorial,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = &(a_2 b_3 - a_3 b_2)\boldsymbol{e}_1 + \\ &(a_3 b_1 - a_1 b_3)\boldsymbol{e}_2 + \\ &(a_1 b_2 - a_2 b_1)\boldsymbol{e}_3, \end{aligned}$$

ganharam a questão; também ganharam os que fizeram o que eu realmente queria:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_i b_j \boldsymbol{e}_k \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [3,0] Se

$$\boldsymbol{a} = (1,2,3),$$
$$\boldsymbol{b} = (4,5,6),$$
$$\boldsymbol{c} = (7,8,9),$$

calcule $(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b}.$$

Usando `MAXIMA`:

```
(%i1) a : [1,2,3];
(%o1) [1,2,3]
(%i2) b : [4,5,6];
(%o2) [4,5,6]
(%i3) c:[7,8,9];
(%o3) [7,8,9]
(%i4) b.c*a - a.c*b;
(%o4) [-78,-6,66]
```

Continue a solução no verso ⟹

3 [4,0] Considere a base canônica do $\mathbb{R}^3$,

$$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}.$$

Construa os bi-vetores $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ **definidos** por

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{i} &\equiv \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3,\\
\boldsymbol{j} &\equiv \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1,\\
\boldsymbol{k} &\equiv \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2.
\end{aligned}$$

Prove que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{i}^2 &= -1,\\
\boldsymbol{j}^2 &= -1,\\
\boldsymbol{k}^2 &= -1,\\
\boldsymbol{ijk} &= 1.
\end{aligned}$$

A última equação **não é** a histórica de Hamilton ($\boldsymbol{ijk} = -1$), mas é a **correta** quando $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$ são definidos como acima.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{k} &= \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2;\\
\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{k} &= \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_1;\\
\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{kk} &= -\boldsymbol{e}_1 \Rightarrow \boldsymbol{k}^2 = -1 \blacksquare
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{j} &= \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1;\\
\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{j} &= \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_3;\\
\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{jj} &= -\boldsymbol{e}_3 \Rightarrow \boldsymbol{j}^2 = -1 \blacksquare
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{i} &= \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3;\\
\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{i} &= \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_2;\\
\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{ii} &= -\boldsymbol{e}_2 \Rightarrow \boldsymbol{i}^2 = -1 \blacksquare
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boldsymbol{ijk} = (\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1)(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_2(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3)(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 = 1.$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
P02, 29 Mar 2006
Prof. Nelson Luís Dias

53

NOME: ALUNO GENÉRICO　　　　Assinatura: ____________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e LEMBRE-SE: COMECE PELAS MAIS FÁCEIS PARA VOCÊ. PROCURE RESOLVER O MAIOR NÚMERO DE ITENS POSSÍVEL, PARA MAXIMIZAR SUA NOTA. MANTENHA-SE CALMA(O), E PENSE UM POUCO EM QUAL SERÁ A SUA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS. Resolva as questões de forma *LIMPA E ORGANIZADA*, *nos espaços designados*. Boa prova.

Não se esqueça da notação de vetores:

1. com uma seta sobre a letra: $\vec{\imath}$ ou $\vec{a}$ (esta é a forma mais comum entre os físicos) ou
2. com um til *sob* a letra: $\underset{\sim}{i}$, ou $\underset{\sim}{a}$ (esta é a forma mais popular entre os engenheiros, e é a minha preferida),

e garanta seus pontos nas questões †

1 [2,5] Sabendo que $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ é o módulo da área do paralelogramo definido pelos vetores $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, prove que $|[\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}] \cdot \boldsymbol{c}|$, dado pelo módulo do determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix},$$

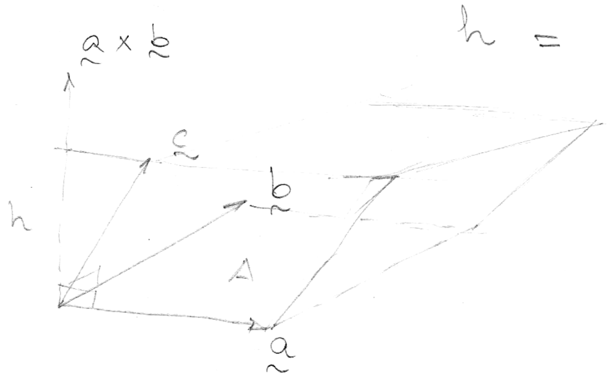
é igual ao volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$. Atenção: use apenas a álgebra vetorial e a geometria tradicionais; **não** use **nenhum** conceito de multivetores, produto geométrico, etc.. Faça os desenhos, diagramas, etc., que julgar necessários.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

O volume do paralelepípedo é $V = A\,h$ onde

$A = |\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}|$ e

$h = \underset{\sim}{c} \cdot \dfrac{\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}}{|\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}|}$;



Portanto: $|\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}|\,h = V = \underset{\sim}{c} \cdot \underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}$, que é igual ao determinante da matriz dada //

Continue a solução no verso ⟹

2 [4,5] Encontre a solução geral de cada uma das equações diferenciais abaixo:

a) [1,5]

$$y\frac{dx}{dy} - y^5 + 3x = 0,$$

b) [1,5]

$$x\frac{dy}{dx} - 2y = x^3y^2,$$

c) [1,5]

$$\frac{dy}{dx} = (y^2 - y)xe^x.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a) $y\dfrac{dx}{dy} + 3x = y^5$ note que esta é uma equação linear em $x(y)$ $\Rightarrow$

$x = uv$

$\dfrac{dx}{dy} = u\dfrac{dv}{dy} + v\dfrac{du}{dy}$; $y\left[u\dfrac{dv}{dy} + v\dfrac{du}{dy}\right] + 3uv = y^5$

$u\left[y\dfrac{dv}{dy} + 3v\right] + yv\dfrac{du}{dy} = y^5$

Force o termo entre colchetes a ser nulo :

$y\dfrac{dv}{dy} + 3v = 0$

$y\dfrac{dv}{dy} = -3v$

$\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{3\,dy}{y}$

$\cancel{\ln}\ \dfrac{dv}{v} + 3\dfrac{dy}{y} = 0$

$\ln|v| + \cancel{3}\ln|y|^3 = C_1$

$\ln|v||y|^3 = C$

$|v||y|^3 = K_1$

$|v| = \dfrac{K_1}{|y|^3}$ $\Rightarrow$

$v = \dfrac{K_1}{y^3}$

Prosseguindo :

$y\dfrac{K_1}{y^3}\dfrac{du}{dy} = y^5$

$K_1\dfrac{du}{dy} = y^7$

$du = \dfrac{1}{K_1}y^7\,dy$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

$$u = \frac{1}{K_1}\left[\frac{1}{8}y^8 + K_2\right]$$

$$x = uv = \frac{\cancel{K_1}}{y^3} \times \frac{1}{\cancel{K_1}}\left[\frac{1}{8}y^8 + K_2\right]$$

$$\boxed{x = \frac{1}{8}y^5 + \frac{K_2}{y^3}} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{5}{8}y^4 - 3K_2 y^{-4}$$

Resta verificar:

$$y\left[\frac{5}{8}y^4 - 3K_2 y^{-4}\right] + 3\left[\frac{1}{8}y^5 + \frac{K_2}{y^3}\right] =$$

$$\frac{8}{8}y^5 - 3K_2 y^{-3} + 3K_2 y^{-3} = y^5 . \quad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

---

b)

$$x\frac{dy}{dx} - 2y = x^3 y^2$$

Isto tem jeito de uma eq di Bernoulli

$$z = y^{1-n} = y^{1-2} = y^{-1}$$

$$dz = -1\, y^{-2}\, dy$$

$$x y^{-2}\frac{dy}{dx} - 2y^{-1} = x^3$$

$$x\left[-\frac{dz}{dx}\right] - 2z = x^3$$

$$\boxed{x\frac{dz}{dx} + 2z = -x^3}$$

Esta "nova" eq. diferencial é linear

A solução recai em:

$$z = uv$$

$$\frac{dz}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

CONTINUAÇÃO DA SOLUÇÃO

$$x\left[u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}\right]+2uv=-x^3$$

$$u\left[x\frac{dv}{dx}+2v\right]+xv\frac{du}{dx}=-x^3$$

$$x\frac{dv}{dx}+2v=0$$

$$x\frac{dv}{dx}=-2v$$

$$\frac{dv}{v}=-2\frac{dx}{x}$$

$$2\frac{dx}{x}+\frac{dv}{v}=0$$

$$2\ln|x|+\ln|v|=C_1$$

$$\ln|x|^2|v|=C_1$$

$$|x|^2|v|=e^{C_1}=K_1$$

$$|v|=\frac{K_1}{|x|^2}=\frac{K_1}{x^2}$$

$$v=\frac{K_1}{x^2}$$

Substituindo na eq "restante":

$$x\frac{K_1}{x^2}\frac{du}{dx}=-x^3$$

$$\frac{K_1}{x}\frac{du}{dx}=-x^3$$

$$du=\frac{-1}{K_1}x^4\,dx$$

$$u=-\frac{1}{K_1}\left[\frac{x^5}{5}+K_2\right]$$

$$z=uv=\frac{\cancel{K_1}}{x^2}\times\frac{-1}{\cancel{K_1}}\left[\frac{x^5}{5}+K_2\right]$$

$$z=-\left(\frac{x^3}{5}+\frac{K_2}{x^2}\right)$$

$$z=y^{-1}\Rightarrow y=-\left[\frac{x^5+5K_2}{5x^2}\right]^{-1}=\frac{-5x^2}{x^5+5K_2}$$

verifico com MAXIMA: OK!

c) $$\frac{dy}{dx}=(y^2-y)\,x\,e^x$$

$$\frac{dy}{y^2-y}=x\,e^x\,dx$$

Continue a solução no verso ⟹

A equação é separável; basta saber integrar:

$$\frac{\cancel{dy}\,1}{y^2 - y} = \frac{\cancel{dy}\,1}{y(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1}$$

$$= \frac{A(y-1) + By}{y(y-1)} = \frac{(A+B)y - A}{y^2 - y} \qquad \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dy}{y^2 - y} = \int \left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} \right) dy = -\ln|y| + \ln|y-1| + c_1$$

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x dx}_{dv} = \underbrace{x e^x}_{uv} - \int \underbrace{e^x}_{v} \underbrace{dx}_{du} = x e^x - e^x$$

$$\ln|y-1| - \ln|y| + \ln c_1 = e^x (x-1) \cancel{+ c_2}$$

$$\ln c_1 \left| \frac{y-1}{y} \right| = e^x (x-1)$$

$$c_1 \frac{y-1}{y} = \exp\left[e^x (x-1) \right]$$

$$\frac{y-1}{y} = c_2 \exp\left[e^x (x-1) \right] = f(x)$$

$$y - 1 = y f(x)$$

$$y \left[1 - f(x) \right] = 1$$

$$y = \frac{1}{1 - f(x)} = \frac{1}{1 - c_2 \exp\left[e^x (x-1) \right]} \quad //$$

3 [3,0] Encontre as **duas** soluções LI de

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

Sugestão: Encontrar uma é fácil; qual é o método consagrado para encontrar uma segunda solução LI, dado que já temos a primeira? (1,0 ponto para a primeira (fácil); 2,0 pontos para a segunda (mais difícil)).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO: Esta é uma equação de Euler:

$$y = x^m \; ; \; y' = m x^{m-1} \; ; \; y'' = m(m-1)x^{m-2} \; ;$$

$$\cancel{x^2}\left[m(m-1)\cancel{x^{m-2}}\right] - \cancel{x} m \cancel{x^{m-1}} + \cancel{x^m} = 0$$

$$(m^2 - m) - m + 1 = 0$$

$$m^2 - 2m + 1 = 0 \implies (m-1)^2 = 0$$

Portanto, a 1ª solução LI é $y = x$ (OK)

Procuro agora uma 2ª solução pelo método de variação de constantes:

$$y = A(x)\,x$$

$$y' = A(x) + A'(x)\,x$$

$$y'' = A'(x) + A''(x)\,x + A'(x)$$

$$= A''(x)\,x + 2A'(x) \implies$$

$$x^2\left[A''x + 2A'\right] - x\left[A + A'x\right] + Ax = 0$$

$$x^3A'' + 2x^2A' - \cancel{Ax} - x^2A' + \cancel{Ax} = 0$$

$$x^3A'' + x^2A' = 0$$

note que esta equação não contém A $\implies$

$B = A'$ $\implies$

$$x^3\frac{dB}{dx} + x^2B = 0$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Agora esta equação deve ser separável:

$$x\frac{dB}{dx} + B = 0 \quad \times \frac{dx}{Bx} \rightsquigarrow$$

$$\frac{dB}{B} + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\ln|B| + \ln|x| = C_1$$

$$\ln|Bx| = C_1$$

$$|Bx| = e^{C_1} = K_1 \quad \text{ou:} \quad Bx = K_1$$

$$B = \frac{K_1}{x}$$

mas $B = \frac{dA}{dx} \Rightarrow \frac{dA}{dx} = \frac{K_1}{x}$

$$dA = K_1 \frac{dx}{x} \longrightarrow A = K_1 \ln|x| + K_2$$

Finalmente,

$$y = Ax = (K_1 \ln|x| + K_2)x =$$

$$y = K_1 x \ln|x| + K_2 x$$

TT009 Matemática Aplicada I
P02, 29 Mar 2006
Prof. Nelson Luís Dias

54

NOME: ALUNO GENÉRICO

Assinatura: ______________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e LEMBRE-SE: COMECE PELAS MAIS FÁCEIS PARA VOCÊ. PROCURE RESOLVER O MAIOR NÚMERO DE ITENS POSSÍVEL, PARA MAXIMIZAR SUA NOTA. MANTENHA-SE CALMA(O), E PENSE UM POUCO EM QUAL SERÁ A SUA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS. Resolva as questões de forma *LIMPA E ORGANIZADA*, *nos espaços designados*. Boa prova.

Não se esqueça da notação de vetores:

1. com uma seta sobre a letra: $\vec{\imath}$ ou $\vec{a}$ (esta é a forma mais comum entre os físicos) ou
2. com um til *sob* a letra: $\underset{\sim}{i}$, ou $\underset{\sim}{a}$ (esta é a forma mais popular entre os engenheiros, e é a minha preferida),

e garanta seus pontos nas questões ✝

1 [2,0] Se $\boldsymbol{a} = (3,7,2)$, e $\boldsymbol{b} = (1,4,5)$, obtenha a equação do plano definido pelos vetores $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, e que passa pelo ponto $(0,0,0)$, na forma $Ax + By + Cz = D$. **Lembre-se**: se $\boldsymbol{n}$ é um vetor normal ao plano, e se $\boldsymbol{v} = (x,y,z)$ é um vetor contido no plano desejado (lembre-se de que ele passa pela origem), então: $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} = 0$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO: ESTA É UMA QUESTÃO DE 2º GRAU!

PRIMEIRO, ACHO UM VETOR NORMAL AO PLANO DE $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$:

$$\underset{\sim}{n} = \underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b} = (3,7,2) \times (1,4,5) = (27,-13,5)$$

O plano desejado passa por $(0,0,0) \Rightarrow D = 0$ e qq vetor deste plano é da forma $\underset{\sim}{r} = (x,y,z)$; agora,

$$\underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{r} = 0 \Rightarrow \boxed{27x - 13y + 5z = 0}$$

é a equação desejada.

Continue a solução no verso ⟹

2 [2,0] Sejam $f(z)$ e $g(z)$ duas funções complexas *analíticas* em z_0, e tais que $f(z_0) = g(z_0) = 0$; então existem as séries de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!}(z - z_0)^n,$$

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n)}}{n!}(z - z_0)^n.$$

Suponha que $g'(z_0) \neq 0$; usando os fatos acima, prove a *Regra de l'Hôpital*:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{\overset{0}{\cancel{f(z_0)}} + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots}{\underset{0}{\cancel{g(z_0)}} + g'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots}$$

$$= \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0) + \frac{f'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^2 + \cdots}{g'(z_0) + \frac{g''(z_0)}{2!}(z-z_0) + \frac{g'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^2 + \cdots}$$

$$= \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} \quad //$$

Esta é, essencialmente, uma questão de CÁLCULO I.

<u>Comentário</u> muitos de vocês cometeram o seguinte erro ABSURDO :

$$\frac{\sum_0^\infty \frac{f^{(n)}}{\cancel{n!}} \cancel{(z-z_0)^n}}{\sum_0^\infty \frac{g^{(n)}}{\cancel{n!}} \cancel{(z-z_0)^n}} = \frac{\sum_0^\infty f^{(n)}}{\sum_0^\infty g^{(n)}}, \quad \text{etc.}$$

isto evidencia total ... desconhecimento ? ... de álgebra.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [3,0] Seja o contorno de integração C o círculo $|z| = 1$, percorrido no sentido anti-horário (positivo) desde $\theta = 0$ até $\theta = 2\pi$. Calcule:

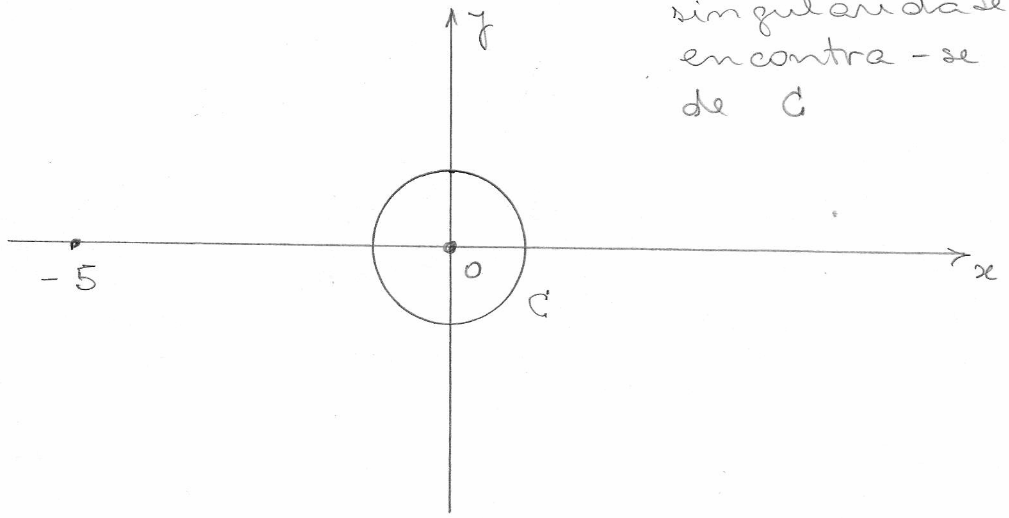
$$\oint_C \frac{dz}{z(z+5)}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Se a está no interior de um contorno C,

$$\oint (z-a)^n\,dz = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

Agora faça o desenho: Apenas a singularidade $z = 0$ encontra-se dentro de C



Decomponha em frações parciais (MAXIMA):

$$f(z) = \frac{-1}{5(z+5)} + \frac{1}{5z}$$

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint \frac{1}{5z}\,dz - \underbrace{\oint_C \frac{1}{5(z+5)}\,dz}_{=\,0 \text{ (Teor de Cauchy)}}$$

$$= \frac{1}{5} \times 2\pi i$$

$$= \frac{2\pi i}{5} \;//$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [3,0] **Utilizando obrigatoriamente integração de contorno e o Teorema dos Resíduos**, calcule

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+1}\,dx.$$

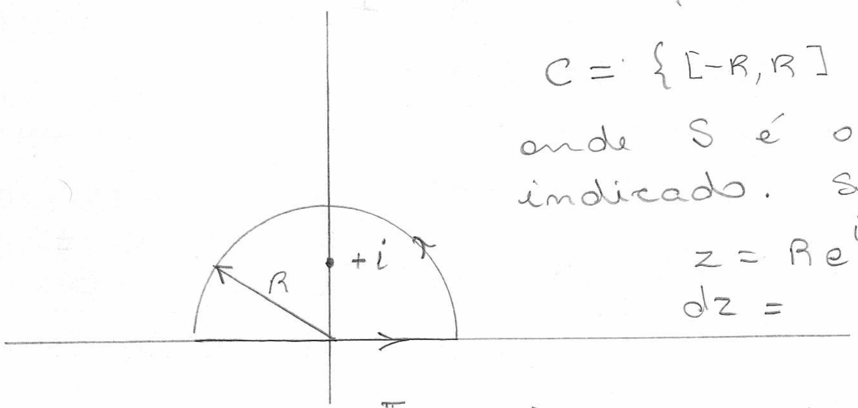
Sugestão: considere a integral

$$J = \oint_C \frac{e^{iaz}}{z^2+1}\,dz.$$

em um contorno C adequado. Ao escolher seu contorno de integração, a integral deve se anular (no limite) em alguns trechos do contorno: **não se esqueça de provar isto.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO: Este é o Exemplo 5, pg. 1246, do livro-texto: $f(z)$ tem pólos de ordem 1 em $z^2=-1$, $z=\pm i$. Escolho o contorno abaixo:

e faço $R \to \infty$



$C = \{[-R,R] \cup S)$, onde S é o semi-círculo indicado. Sobre S:

$$z = Re^{i\theta}$$
$$dz = iRe^{i\theta}\,d\theta$$

$$\left|\int_S \frac{e^{iaz}}{z^2+1}\,dz\right| = \left|\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{e^{iaz}}{R^2e^{2i\theta}+1}\, iRe^{i\theta}\,d\theta\right|$$

$$= \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{ia(x+iy)}\, iRe^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta}+1}\,d\theta\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{iaR\cos\theta}\, e^{-R\,\mathrm{sen}\,\theta}\, iRe^{i\theta}\,d\theta}{R^2e^{2i\theta}+1}\right|$$

$$\leqslant \int_0^{\pi} \frac{R\,e^{-R\,\mathrm{sen}\,\theta}}{|R^2e^{2i\theta}+1|}\,d\theta \leqslant \int_0^{\pi} \frac{Re^{-R\,\mathrm{sen}\,\theta}}{|R^2e^{2i\theta}|}\,d\theta \to 0 \text{ qdo } R \to \infty \,//$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Então, o resíduo em $z = i$ é

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \to i} \frac{e^{iaz}}{(z+i)} = \frac{e^{i^2 a}}{2i} = \frac{e^{-a}}{2i}$$

$$\oint_C \frac{e^{iaz}}{z^2+1}\,dz = \cancel{2}\pi \cancel{i} \times \frac{e^{-a}}{\cancel{2i}} = \pi e^{-a}$$

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ia(x+iy)}}{z^2+1}\,dz = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1}\,dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax + i \operatorname{sen} ax}{x^2+1}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-a}$$

A integral desejada, portanto, é

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2} e^{-a} \quad //$$

TT009 Matemática Aplicada I
P04, 09 Mai 2008
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e LEMBRE-SE: COMECE PELAS MAIS FÁCEIS PARA VOCÊ. PROCURE RESOLVER O MAIOR NÚMERO DE ITENS POSSÍVEL, PARA MAXIMIZAR SUA NOTA. MANTENHA-SE CALMA(O), E PENSE UM POUCO EM QUAL SERÁ A SUA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS. Resolva as questões de forma *LIMPA E ORGANIZADA*, *nos espaços designados*. Boa prova.

Não se esqueça da notação de vetores:

1. com uma seta sobre a letra: $\vec{\imath}$ ou $\vec{a}$ (esta é a forma mais comum entre os físicos) ou
2. com um til *sob* a letra: $\underset{\sim}{i}$, ou $\underset{\sim}{a}$ (esta é a forma mais popular entre os engenheiros, e é a minha preferida),

e garanta seus pontos nas questões ☨

1 [4,0] Dada a equação diferencial

$$x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0,$$

a) [1,0] Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular.

b) [2,0] Aplique o método de Frobenius em torno de $x = 0$; obtenha uma equação indicial com raiz dupla, e ache a 1ª solução L.I. $y_1(x)$.

c) [1,0] Obtenha a segunda solução L.I. **OBRIGATORIAMENTE** pelo método de variação de constantes, fazendo

$$y_2(x) = u(x)y_1(x),$$

inserindo $y_2(x)$ de volta na equação diferencial e resolvendo para $u(x)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) Na forma canônica:

$$y'' + \underbrace{\frac{3x-1}{x(x-1)}}_{p(x)} y' + \underbrace{\frac{1}{x(x-1)}}_{q(x)} y = 0;$$

As funções

$$xp(x) = \frac{3x-1}{x-1}, \qquad x^2q(x) = \frac{x}{x-1},$$

são analíticas em $x = 0$; portanto, $x = 0$ é um ponto singular regular ■
b) Como sempre, o método de Frobenius é

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{s+n}; \qquad y' = \sum_{n=0}^{\infty} (s+n)a_n x^{s+n-1}; \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (s+n-1)(s+n)a_n x^{s+n-2};$$

trabalhando com a forma *não-canônica*, e expandindo cuidadosamente cada termo da equação diferencial, obtém-

Continue a solução no verso ⟹

se:

$$
\begin{aligned}
x^2y'' &= \sum_{n=0}^{\infty}(s+n-1)(s+n)a_nx^{s+n},\\
-xy'' &= \sum_{n=0}^{\infty}-(s+n-1)(s+n)a_nx^{s+n-1},\\
3xy' &= \sum_{n=0}^{\infty}3(s+n)a_nx^{s+n},\\
-y' &= \sum_{n=0}^{\infty}-(s+n)a_nx^{s+n-1},\\
y &= \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{s+n}.
\end{aligned}
$$

Sejam

$$
\begin{aligned}
s+n-1 &= s+m,\\
n &= m+1,\\
m &= n-1.
\end{aligned}
$$

Os termos em $s+n-1$ tornam-se

$$
\begin{aligned}
-xy'' &= \sum_{m=-1}^{\infty}-(s+m)(s+m+1)a_{m+1}x^{s+m},\\
-y' &= \sum_{m=-1}^{\infty}-(s+m+1)a_{m+1}x^{s+m}.
\end{aligned}
$$

Agora recoloco todos os termos na equação diferencial, trocando m por n nas duas equações acima; o termo $n=-1$ só aparece nestas duas; portanto:

$$
\begin{aligned}
&-\left[(s+(-1))(s+(-1)+1)+(s+(-1)+1)\right]a_0x^{s-1}+\\
&\qquad\sum_{n=0}^{\infty}\{[(s+n-1)(s+n)+3(s+n)+1]\,a_n-[(s+n)(s+n+1)+(s+n+1)]\,a_{n+1}\}x^{s+n}=0.
\end{aligned}
$$

$$
-[(s)^2]a_0x^{s-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\{\left[(s+n+1)^2\right]a_n-\left[(s+n+1)^2\right]a_{n+1}\}x^{s+n}=0.
$$

A equação indicial é $s^2=0$, que tem *raiz dupla* $s=0$; a relação de recorrência é

$$
a_{n+1}=a_n.
$$

Portanto, a 1ª solução em série é

$$
y_1(x)=1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots=\frac{1}{1-x}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

é fácil conferir que esta é, realmente, uma solução da equação diferencial. Substitua na equação diferencial:

$$
\begin{aligned}
y_2' &= uy_1' + u'y_1,\\
y_2'' &= u'y_1' + uy_1'' + u'y_1' + u''y_1,\\
0 &= x(x-1)[u'y_1' + uy_1'' + u'y_1' + u''y_1] + (3x-1)[uy_1' + u'y_1] + uy_1,\\
0 &= u\left\{x(x-1)y_1'' + (3x-1)y_1' + y_1\right\} + x(x-1)[2u'y_1' + u''y_1] + (3x-1)[u'y_1]\\
0 &= x(x-1)\left[\frac{2u'}{(1-x)^2} + \frac{u''}{1-x}\right] + \frac{3x-1}{1-x}u'\\
0 &= -\frac{2x}{1-x}u' - xu'' + \frac{3x-1}{1-x}\\
0 &= -\left[u' + xu''\right]\\
u'' &= -\frac{u'}{x}.
\end{aligned}
$$

Faça $v = u' \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
\frac{dv}{dx} &= -\frac{v}{x}\\
\frac{dv}{v} &= -\frac{dx}{dx}\\
\ln v &= -\ln x\\
v &= \frac{1}{x}\\
u &= \int \frac{dx}{x} = \ln x.
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
y_2(x) = \frac{\ln x}{1-x} \blacksquare
$$

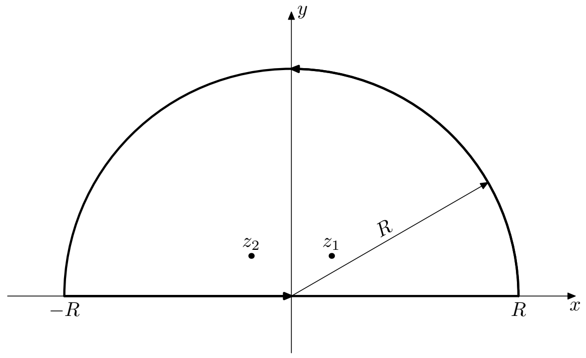
Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [3,0] Usando **OBRIGATORIAMENTE** o Teorema dos Resíduos, e justificando todos os passos necessários (escolha de um contorno adequado; prova de que a integral de linha se anula sobre certas partes do contorno, etc.), calcule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

O contorno de integração é mostrado na figura abaixo, que foi desenhada com MetaPost (código ao lado da figura):




```
verbatimtex
%&latex
\documentclass{article}
\begin{document}
etex
beginfig(1) ;
  drawarrow (-5cm,0)..(5cm,0) ;
  drawarrow (0,-1cm)..(0,5cm) ;
  pickup pencircle scaled 1.2pt ;
  drawarrow (-4cm,0)--(0,0) ;
  drawarrow (4cm,0)..4cm*dir(45)..(0,4cm) ;
  draw (-4cm,0)..(4cm,0) ;
  draw halfcircle scaled 8cm ;
  label.bot(btex $R$ etex,(4cm,0));
  label.bot(btex $-R$ etex,(-4cm,0));
  pickup pencircle scaled 0.5pt ;
  drawarrow (0,0)--4cm*dir(30);
  label.top (btex $R$ etex, (2cm,0)) rotated 30 ;
  label.bot(btex $x$ etex,(5cm,0));
  label.rt(btex $y$ etex,(0,5cm));
% ----------------------------------------------
% singularidades
% ----------------------------------------------
  dotlabel.top( btex $z_1$ etex, 1cm*dir(45)) ;
  dotlabel.top( btex $z_2$ etex, 1cm*dir(135)) ;
endfig ;
end ;
```

Se $f(z) = 1/(1+z^4)$, as singularidades são dadas por

$$\begin{aligned} 1 + z^4 &= 0, \\ z^4 &= -1 = e^{i(\pi+2n\pi)}, \\ r^4 e^{4i\theta} &= 1e^{i(\pi+2n\pi)}, \\ \theta &= \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

A figura mostra os pólos z_1 e z_2 que se encontram dentro do contorno de integração. Claramente, todos os pólos são de ordem 1, pois $1 + z^4 = \prod_{k=1}^4 (z - z_k)$. Já que estamos aqui, calculemos os resíduos:

$$\begin{aligned} c_{-1}^{(1)} &= \lim_{z\to e^{i\pi/4}} \frac{z - e^{i\pi/4}}{1+z^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}(-1+i)}, \\ c_{-1}^{(2)} &= \lim_{z\to e^{3i\pi/4}} \frac{z - e^{3i\pi/4}}{1+z^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}(1+i)}. \end{aligned}$$

Sejam agora H o segmento $[-R, +R]$, e S o semi-círculo $x^2 + y^2 = R^2$, $y > 0$; o teorema dos resíduos é

$$\oint_C \frac{1}{1+z^4}\,dz = \int_H \frac{1}{1+z^4}\,dz + \int_S \frac{1}{1+z^4}\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{2} c_{-1}^{(k)}.$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Mas

$$\left|\int_S \frac{1}{1+z^4}\,dz\right| \le \int_S \left|\frac{1}{1+z^4}\,dz\right|$$
$$= \int_{\theta=0}^{\pi} \left|\frac{iRe^{i\theta}}{1+R^4e^{4i\theta}}\,d\theta\right|$$
$$= \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{1}{|1/R+R^3e^{4i\theta}|}\,d\theta \to 0$$

quando $R \to \infty$ ■

Portanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} = 2\pi i(c_{-1}^{(1)} + c_{-1}^{(2)}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \ ■$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [3,0] Resolva a equação de Airy

$$y'' - xy = 0$$

em série de potências $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (**note que** $x = 0$ **é um ponto regular, e que portanto isto não é o método de Frobenius**); em particular mostre que se deve ter necessariamente $a_2 = 0$, e obtenha os **3 primeiros** termos das séries que multiplicam, respectivamente, a_0 e a_1 (isto é: as duas soluções LI).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

"The Airy function describes the appearance of a star — a point source of light — as it appears in a telescope" (`http://en.wikipedia.org/wiki/Airy_function`).

Como sempre:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2}.$$

Substituindo na equação diferencial:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

Fazendo $n - 2 = m + 1$, isto é: fazendo $m = n - 3$,

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{m=-3}^{\infty} (m+2)(m+3) a_{m+3} x^{m+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}, \\
0 &= \sum_{m=-1}^{\infty} (m+2)(m+3) a_{m+3} x^{m+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}, \\
0 &= 2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+3) a_{n+3} - a_n\right] x^{n+1}.
\end{aligned}$$

A relação de recorrência é

$$a_{n+3} = \frac{a_n}{(n+2)(n+3)}.$$

Claramente, $a_2 = a_5 = a_8 = \ldots = 0$; partindo de $a_0 = 1$: $a_3 = 1/6, a_6 = 1/180, a_9 = 1/12960$; partindo de $a_1 = 1$: $a_4 = 1/12, a_7 = 1/504, a_{10} = 1/45360$, e as duas soluções LI são:

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \frac{x^9}{12960} + \ldots, \\
y_2(x) &= x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} + \frac{x^{10}}{45360} + \ldots \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
P05, 21 Mai 2008
Prof. Nelson Luís Dias
GABARITO

0

Assinatura: ______________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e LEMBRE-SE: COMECE PELAS MAIS FÁCEIS PARA VOCÊ. PROCURE RESOLVER O MAIOR NÚMERO DE ITENS POSSÍVEL, PARA MAXIMIZAR SUA NOTA. MANTENHA-SE CALMA(O), E PENSE UM POUCO EM QUAL SERÁ A SUA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS. Resolva as questões de forma *LIMPA E ORGANIZADA*, *nos espaços designados*. Boa prova.

Não se esqueça da notação de vetores:

1. com uma seta sobre a letra: $\vec{\imath}$ ou $\vec{a}$ (esta é a forma mais comum entre os físicos) ou
2. com um til *sob* a letra: $\underset{\sim}{i}$, ou $\underset{\sim}{a}$ (esta é a forma mais popular entre os engenheiros, e é a minha preferida),

e garanta seus pontos nas questões ☨

1 [5,0] Usando **obrigatoriamente** transformada de Laplace, resolva

$$y'' - y' - 2y = x^2, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 3.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{y'' - y' - 2y\} &= \mathscr{L}\{x^2\} \\
s^2\overline{y} - sy(0) - y'(0) - [s\overline{y} - y(0)] - 2\overline{y} &= \frac{2}{s^3} \\
s^2\overline{y} - sy(0) - y'(0) - s\overline{y} + y(0) - 2\overline{y} &= \frac{2}{s^3} \\
s^2\overline{y} - s - 3 - s\overline{y} + 1 - 2\overline{y} &= \frac{2}{s^3} \\
\overline{y}(s^2 - s - 2) - s - 2 &= \frac{2}{s^3} \\
\overline{y}(s^2 - s - 2) &= s + 2 + \frac{2}{s^3} \\
\overline{y} &= \frac{s+2}{s^2 - s - 2} + \frac{2}{s^3(s^2 - s - 2)} \\
\overline{y} &= \frac{1}{3\,(s+1)} - \frac{3}{4\,s} + \frac{1}{2\,s^2} - \frac{1}{s^3} + \frac{17}{12\,(s-2)} \\
y(x) &= \frac{17}{12}e^{2x} + \frac{1}{3}e^{-x} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{3}{4} \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Verificação com `MAXIMA`:

```
(%i11) eq : 'diff(y,x,2) - 'diff(y,x) - 2*y = x^2 ;
                                 2
                                d y   dy          2
(%o11)                          --- - -- - 2 y = x
                                  2   dx
                                dx
(%i12) ode2(eq,y,x) ;
                                                          2
                              2 x          - x       2 x  - 2 x + 3
(%o12)            y = %k1 %e     + %k2 %e      - --------------
                                                        4
(%i13) ic2(%,x=0,y=1,'diff(y,x)=3) ;
                              2 x       - x       2
                         17 %e       %e        2 x  - 2 x + 3
(%o13)               y = -------- + ----- - --------------
                            12         3            4
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [3,0] Utilizando **obrigatoriamente** o Teorema da Convolução:

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right\} = \mathscr{L}\{f\}\,\mathscr{L}\{g\}$$

calcule

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3s-10}\right\}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Fatoro o denominador:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3s-10}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s-2)(s+5)}\right\}\\ &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s-2)}\frac{1}{(s+5)}\right\}.\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s-2}\right\} &= 3e^{2t};\\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}\right\} &= e^{-5t}.\end{aligned}$$

A transformada de Laplace inversa desejada, portanto, é a convolução destas duas:

$$3\int_{\tau=0}^{t} e^{2(t-\tau)}e^{-5\tau}\,d\tau = \frac{3}{7}\left[e^{2t}-e^{-5t}\right] \blacksquare$$

Verificação com `MAXIMA`:

```
(%i1) ilt(3/((s-2)*(s+5)),s,t);
                                  2 t        - 5 t
                               3 %e       3 %e
(%o1)                          ------- - ---------
                                  7          7
```

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
P06, 06 Jun 2008
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO　　　　Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e LEMBRE-SE: COMECE PELAS MAIS FÁCEIS PARA VOCÊ. PROCURE RESOLVER O MAIOR NÚMERO DE ITENS POSSÍVEL, PARA MAXIMIZAR SUA NOTA. MANTENHA-SE CALMA(O), E PENSE UM POUCO EM QUAL SERÁ A SUA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS. Resolva as questões de forma *LIMPA E ORGANIZADA*, *nos espaços designados*. Boa prova.

---

1 [30] Seja $\mathscr{F}$ um espaço de funcões $f(x)$ com $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$; a forma de se definir a derivada de uma distribuição ϕ é

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(x)f(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)f'(x)\,dx. \qquad (*)$$

Seja agora a distribuição ϕ definida por

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)f(x)\,dx &\equiv \int_{0_-}^{\infty} f(x)\,dx\\ &= F(\infty) - F(0)\\ &= -F(0),\end{aligned}$$

onde $F(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\,d\xi$, e nós estamos supondo que $\lim_{x\to\pm\infty} F(x) = 0$, ou seja: que $F \in \mathscr{F}$.

a) [20] Usando obrigatoriamente (*), mostre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(x)f(x)\,dx = f(0).$$

b) [10] ϕ e ϕ' são velhas conhecidas: quem são elas?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) Usando a definição:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(x)f(x)\,dx &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)f'(x)\,dx\\ &= -\int_{0_-}^{\infty} f'(x)\,dx\\ &= -\left[f(+\infty) - f(0)\right]\\ &= f(0) \blacksquare\end{aligned}$$

b) $\phi'(x)$ tem o mesmo efeito que a delta de Dirac:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(x)f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)\,dx = f(0).$$

Portanto, $\phi'(x) = \delta(x)$, e $\phi(x) = H(x)$ (a função de Heaviside).

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [30] Resolva:

$$\frac{dy}{dt} - \delta(t)y = \frac{y_1}{T^2}t; \qquad y(0) = y_0,$$

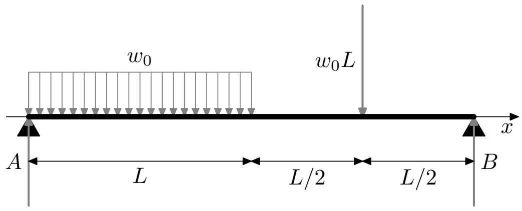
onde y_0, y_1 e T são constantes.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Com a delta de Dirac, a solução é quase trivial:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{y_1}{T^2}t + \delta(t)y(t), \\
\int_{0_-}^{t} \frac{dy}{d\tau}\, d\tau &= \int_{0_-}^{t} \frac{y_1}{T^2}\tau\, d\tau + \int_{0_-}^{t} \delta(\tau)y(\tau)\, d\tau, \\
y(t) - y(0) &= \frac{1}{2}\frac{t^2}{T^2}y_1 + y(0), \\
y(t) &= 2y_0 + \frac{t^2}{2T^2}y_1 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [40] Para a viga da figura ao lado:



a) [10] Descreva o carregamento $w(x)$ em termos das cargas, reações de apoio, e (se necessário) da "função" delta de Dirac e da "função" de Heaviside.

b) [10] Usando as condições de equilíbrio $\int w(x)\,dx = 0$, $\int xw(x)\,dx = 0$, obtenha e resolva as equações nas reações de apoio A e B.

c) [10] Utilizando obrigatoriamente integração de $w(x)$, obtenha o esforço cortante $V(x)$.

d) [10] Utilizando obrigatoriamente integração de $V(x)$, obtenha o momento fletor $M(x)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

(a)

$$w(x) = A\delta(x) - w_0\left[H(x) - H(x-L)\right] - w_0L\delta(x - 3L/2) + B\delta(x-2L).$$

Para resolver (b), (c) e (d), será preciso calcular integrais do tipo $\int_{-\infty}^{x} f(\xi)H(\xi - a)\,d\xi$; de maneira geral:

$$\int_{-\infty}^{x} f(\xi)H(\xi-a)\,d\xi = \int_{a}^{x} f(\xi)H(\xi-a)\,d\xi = H(x-a)\int_{a}^{x} f(\xi)\,d\xi = H(x-a)\left[F(x) - F(a)\right],$$

onde $F(x)$ é a primitiva de $f(x)$.

(b) A primeira equação é

$$\int_{0_-}^{2L_+} w(x)\,dx = 0,$$

$$\int_{0_-}^{2L_+} \left\{A\delta(x) - w_0\left[H(x) - H(x-L)\right] - w_0L\delta(x-3L/2) + B\delta(x-2L)\right\}\,dx = 0,$$

$$A - w_0\left[2L - L\right] - w_0L + B = 0,$$

$$A + B = 2w_0L.$$

A segunda equação é

$$\int_{0_-}^{2L_+} xw(x)\,dx = 0,$$

$$\int_{0_-}^{2L_+} x\left\{A\delta(x) - w_0\left[H(x) - H(x-L)\right] - w_0L\delta(x-3L/2) + B\delta(x-2L)\right\}\,dx = 0$$

$$-w_0\left[\frac{(2L)^2}{2}H(2L) - \frac{1}{2}((2L)^2 - L^2)H(2L-L)\right] - w_0L\frac{3L}{2} + 2LB = 0$$

$$-\frac{w_0L^2}{2} - w_0L\frac{3L}{2} + B(2L) = 0,$$

$$-2w_0L^2 + 2LB = 0,$$

$$B = w_0L, \qquad A = w_0L.$$

(c) A equação para $w(x)$ agora é

$$w(x) = w_0L\delta(x) - w_0\left[H(x) - H(x-L)\right] - w_0L\delta(x-3L/2) + w_0L\delta(x-2L),$$

$$\begin{aligned}
V(x) &= \int_{-\infty}^{x} w(x)\,dx \\
&= w_0L\int_{-\infty}^{x}\delta(\xi)\,d\xi - w_0\int_{-\infty}^{x}\left[H(\xi) - H(\xi-L)\right]\,d\xi - w_0L\int_{-\infty}^{x}\delta(\xi-3L/2)\,d\xi + w_0L\int_{-\infty}^{x}\delta(\xi-2L)\,d\xi \\
&= w_0LH(x) - w_0\left[xH(x) - (x-L)H(x-L)\right] - w_0LH(x-3L/2) + w_0LH(x-2L)
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

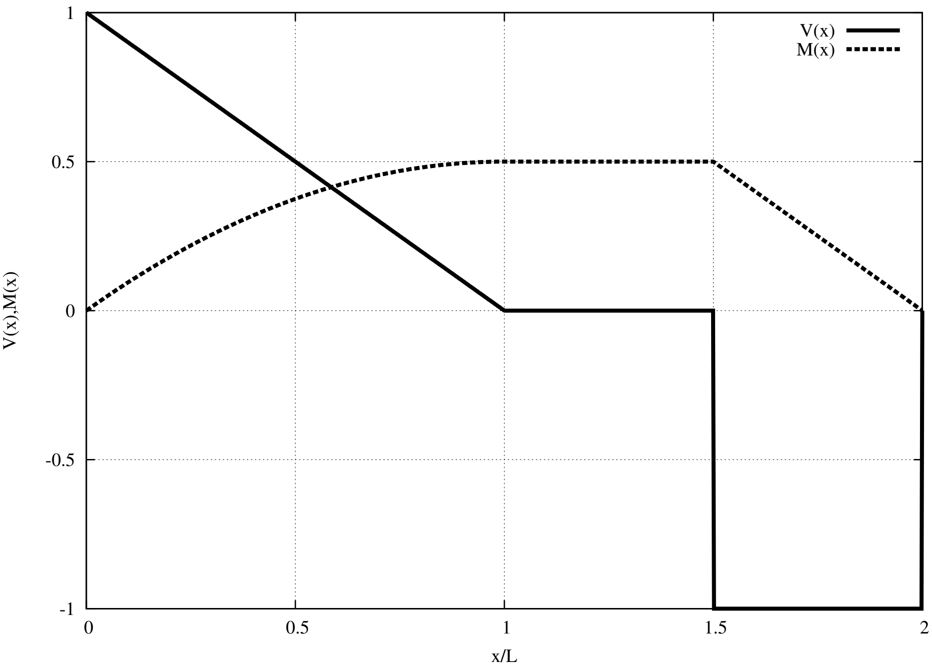
(d) Integrando agora $V(\xi)$ para obter $M(x)$, encontra-se:

$$M(x) = w_0 LxH(x) - w_0\left[\frac{x^2}{2}H(x) - \frac{(x-L)^2}{2}H(x-L)\right] - w_0 L(x-3L/2)H(x-3L/2) + w_0 L(x-2L)H(x-2L) \blacksquare$$

A listagem abaixo mostra a plotagem com *GnuPlot* de $V(x)$ e $M(x)$ para $w_0 = 1$, $L = 1$:

```
set terminal postscript eps enhanced 'Times-Roman 18'
set encoding iso_8859_1
H(x) = ( x < 0 ? 0 : 1)
V(x) = H(x) - (x*H(x) - (x-1)*H(x-1)) - H(x-1.5) + H(x-2)
M(x) = x*H(x) - (x**2*H(x)/2.0 - (x-1)**2*H(x-1.0)/2.0) - (x-1.5)*H(x-1.5) + (x-2.0)*H(x-2)
set xrange [0:2.0]
set xlabel 'x/L'
set ylabel 'V(x),M(x)'
set samples 1000
set grid
set output '2008-1-p06-sol-c1.eps'
plot V(x) with lines lt 1 lw 6, M(x) with lines lt 2 lw 6
!epstopdf 2008-1-p06-sol-c1.eps
```

Com o resultado:



Continue a solução no verso ⟹

TT009 Matemática Aplicada I
P07, 20 Jun 2008
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO   Assinatura: ____________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e LEMBRE-SE: COMECE PELAS MAIS FÁCEIS PARA VOCÊ. PROCURE RESOLVER O MAIOR NÚMERO DE ITENS POSSÍVEL, PARA MAXIMIZAR SUA NOTA. MANTENHA-SE CALMA(O), E PENSE UM POUCO EM QUAL SERÁ A SUA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS. Resolva as questões de forma *LIMPA E ORGANIZADA*, *nos espaços designados*. Boa prova.

Não se esqueça da notação de vetores:

1. com uma seta sobre a letra: $\vec{\imath}$ ou $\vec{a}$ (esta é a forma mais comum entre os físicos) ou
2. com um til *sob* a letra: $\underset{\sim}{i}$, ou $\underset{\sim}{a}$ (esta é a forma mais popular entre os engenheiros, e é a minha preferida),

e garanta seus pontos nas questões ☨

1 [30] Obtenha a solução geral de

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A matriz do sistema é real e simétrica; logo, tem autovalores reais e 2 autovetores ortogonais:

```
(%i5) A : matrix( [1,2],[2,1]);
                                [ 1  2 ]
(%o5)                           [      ]
                                [ 2  1 ]
(%i6) eigenvectors(A) ;
(%o6)              [[[3, - 1], [1, 1]], [1, 1], [1, - 1]]
(%i7)
```

Os autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$, ambos com multiplicidade 1, e seus autovetores são $\boldsymbol{e}_1 = (1, 1)$ e $\boldsymbol{e}_2 = (1, -1)$ (não normalizados). Agora, se $\boldsymbol{u} = u\boldsymbol{e}_1 + v\boldsymbol{e}_2$, o sistema desacoplado de equações diferenciais é

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix},$$

cuja solução óbvia é

$$u(t) = C_1 e^{3t}, \qquad v(t) = C_2 e^{-t}.$$

A solução geral do problema é (simplesmente)

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \blacksquare$$

Vale a pena confirmar:

```
(%i3) u : k1*exp(3*t) ;
                                     3 t
(%o3)                          k1 %e
(%i4) v : k2*exp(-t) ;
                                     - t
(%o4)                          k2 %e
(%i5) [x,y] : u*[1,1] + v*[1,-1] ;
                      3 t         - t        3 t         - t
(%o5)           [k1 %e    + k2 %e   , k1 %e    - k2 %e   ]
(%i6) diff([x,y],t) - A.[x,y] ;
          [             3 t         - t            3 t            - t ]
          [ - 2 (k1 %e    - k2 %e   ) + 2 k1 %e    - 2 k2 %e    ]
(%o6)     [                                                        ]
          [             3 t         - t            3 t            - t ]
          [ - 2 (k1 %e    + k2 %e   ) + 2 k1 %e    + 2 k2 %e    ]
(%i7) expand(%);
                                  [ 0 ]
(%o7)                             [   ]
                                  [ 0 ]
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [30] Obtenha a solução geral de

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ e^t \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A matriz do sistema, e portanto autovalores e autovetores, são os mesmos da primeira questão, para poupar tempo. O sistema diagonalizado (na base dos autovetores $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$) é agora

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}$$

Para achar $f(t)$ e $g(t)$, decomponha o termo não-homogêneo na base dos autovetores:

$$\begin{bmatrix} t \\ e^t \end{bmatrix} = f(t)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + g(t)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Em `MAXIMA`:

```
(%i10) solve([t,exp(t)] - (f*[1,1] + g*[1,-1]),[f,g]);
                               t              t
                             %e  + t     t - %e
(%o10)                 [[f = -------, g = -------]]
                                2          2
```

As duas equações desacopladas que devem ser resolvidas são:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - 3u &= \frac{t+e^t}{2}, \\ \frac{dv}{dt} + v &= \frac{t-e^t}{2}. \end{aligned}$$

Novamente, a solução em `MAXIMA` é

```
(%i12) kill(all);
(%o0)                              done
(%i1) 'diff(u,t) - 3*u - (t+exp(t))/2 ;
                                              t
                             du          - %e  - t
(%o1)                        -- - 3 u + ---------
                             dt              2
(%i2) de1 : % ;
                                              t
                             du          - %e  - t
(%o2)                        -- - 3 u + ---------
                             dt              2
(%i3) ode2(de1,u,t);
                          - 2 t               - 3 t
                        %e         (3 t + 1) %e
                      - ------- - -----------------
                           2              9                 3 t
(%o3)            u = (----------------------------- + %c) %e
                                    2
(%i4) ratsimp(%);
                                   3 t        t
                           36 %c %e    - 9 %e  - 6 t - 2
(%o4)                  u = ----------------------------
                                         36
(%i5) 'diff(v,t) + v - (t - exp(t))/2 ;
                                            t
                               dv         %e  - t
(%o5)                          -- + v + -------
                               dt          2
(%i6) de2 : % ;
                                            t
                               dv         %e  - t
(%o6)                          -- + v + -------
                               dt          2
(%i7) ode2(de2,v,t);
                                    2 t
                                  %e              t
                                  ----- - (t - 1) %e
                           - t      2
(%o7)                v = %e    (%c - -------------------)
                                              2
(%i8) ratsimp(%);
```

Continue a solução no verso ⟹

```
                                - t     2 t                   t
                             %e     (%e     + (2 - 2 t) %e  - 4 %c)
(%o8)              v = - - ------------------------------------
                                              4
(%i9) expand(%);
                                          t
                                       %e           - t    t    1
(%o9)                          v = - --- + %c %e      + - - -
                                        4                 2    2
```

Portanto,

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{3t} - \frac{1}{4}e^t - \frac{t}{6} - \frac{1}{18} \\ C_2 e^{-t} - \frac{1}{4}e^t + \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Voltando para a base canônica:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = u(t)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + v(t)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{3\,t} - \frac{e^t}{2} + C_2 e^{-t} + \frac{t}{3} - \frac{5}{9} \\ C_1 e^{3\,t} - C_2 e^{-t} - \frac{2\,t}{3} + \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

Verificação, com MAXIMA:

```
(%i10) [u,v] ;
(%o10)                                   [u, v]
(%i12) v : rhs(%o9) ;
                                       t
                                    %e           - t    t    1
(%o12)                            - --- + %c %e      + - - -
                                     4                 2    2
(%i13) u : rhs(%o4);
                                          3 t        t
                             36 %c %e     - 9 %e   - 6 t - 2
(%o13)                       ----------------------------
                                              36
(%i14) u : expand(u) ;
                                                 t
                                          3 t   %e    t    1
(%o14)                            %c %e     - --- - - - --
                                                 4    6    18
(%i15) v : v, %c=k2 ;
                                       t
                                    %e           - t    t    1
(%o15)                            - --- + k2 %e      + - - -
                                     4                 2    2
(%i16) u : u, %c=k1 ;
                                                 t
                                          3 t   %e    t    1
(%o16)                            k1 %e     - --- - - - --
                                                 4    6    18
(%i17) [x,y] : u*[1,1] + v*[1,-1] ;
                        t
            3 t    %e          - t    t    5         3 t          - t    2 t    4
(%o17) [k1 %e     - --- + k2 %e     + - - -, k1 %e     - k2 %e     - --- + -]
                        2                 3    9                              3     9
(%i24) A : matrix( [1,2],[2,1]);
                                        [ 1  2 ]
(%o24)                                  [      ]
                                        [ 2  1 ]
(%i25) diff([x,y],t) - A.[x,y];
                                 3 t          - t    2 t    4              3 t             - t
(%o25) matrix([- 2 (k1 %e     - k2 %e     - --- + -) + 2 k1 %e     - 2 k2 %e
                                                 3     9
                                      t
   t    8                  3 t    %e          - t    t    5              3 t             - t
 - - + -], [- 2 (k1 %e     - --- + k2 %e     + - - -) + 2 k1 %e     + 2 k2 %e
   3    9                           2                 3    9
   2 t    10
 + --- - --])
    3     9
(%i26) expand(%);
                                        [   t   ]
(%o26)                                  [       ]
                                        [    t  ]
                                        [ %e    ]
```

Continue a solução no verso ⟹

3 [40] Obtenha a solução geral de

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A questão foi **Anulada**, por ser muito difícil de resolver sem o auxílio de algum método numérico. Todos os alunos que fizeram a prova ganharam a questão integral, por uma questão de justiça.

A solução segue as mesmas linhas da primeira questão, com uma matriz um pouco maior. O problema de autovalor é

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \\ 4 & 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0,$$

com equação característica:

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 24\lambda + 17 = 0.$$

Esta equação, entretanto, é demasiadamente difícil para ser resolvida sem o auxílio de uma busca numérica de suas raízes.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
F, 2008-06-30
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e LEMBRE-SE: COMECE PELAS MAIS FÁCEIS PARA VOCÊ. PROCURE RESOLVER O MAIOR NÚMERO DE ITENS POSSÍVEL, PARA MAXIMIZAR SUA NOTA. MANTENHA-SE CALMA(O), E PENSE UM POUCO EM QUAL SERÁ A SUA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS. Resolva as questões de forma *LIMPA E ORGANIZADA*, *nos espaços designados*. Boa prova.

Não se esqueça da notação de vetores:

1. com uma seta sobre a letra: $\vec{\imath}$ ou $\vec{a}$ (esta é a forma mais comum entre os físicos) ou
2. com um til *sob* a letra: $\underset{\sim}{i}$, ou $\underset{\sim}{a}$ (esta é a forma mais popular entre os engenheiros, e é a minha preferida),

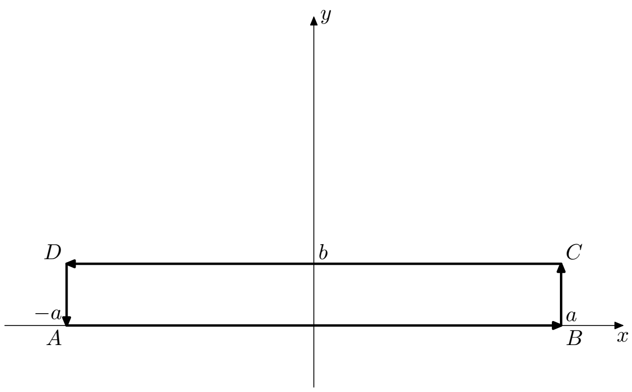
e garanta seus pontos nas questões ✝

1 [25] Sabendo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi},$$

utilize o contorno fechado $ABCD$ ao lado, cujos vértices são $(-a,0)$, $(a,0)$, (a,b) e $(-a,b)$, para calcular

$$I = \lim_{a\to\infty}\int_{DC} e^{-z^2}\,dz = \int_{-\infty+ib}^{+\infty+ib} e^{-z^2}\,dz.$$



Dica: mostre que

$$\lim_{a\to\infty}\int_{BC} e^{-z^2}\,dz = \lim_{a\to\infty}\int_{AD} e^{-z^2}\,dz = 0,$$

e utilize o teorema apropriado para integrais de funções complexas sobre contornos fechados.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Em BC,

$$\begin{aligned}
z &= a + iy;\\
z^2 &= a^2 + 2iay - y^2;\\
\exp(-z^2) &= \exp(-a^2 - i(2ay) + y^2)\\
&= \exp(-a^2)\exp(y^2)\exp(-i(2ay));\\
|\exp(-z^2)| &= \exp(-a^2)\exp(y^2);\\
\lim_{a\to\infty}|\exp(-z^2)| &= 0.
\end{aligned}$$

Agora:

$$\lim_{a\to\infty}\int_{BC} e^{-z^2}\,dz \le \lim_{a\to\infty}\left|\int_{BC} e^{-z^2}\,dz\right| \le \lim_{a\to\infty}\int_{BC}|\exp(-z^2)|\,dz = 0.$$

Continue a solução no verso ⟹

A prova de que a integral sobre AD se anula no limite é totalmente análoga, com a substituído por $-a$. Portanto, já que não há singularidades dentro do contorno $ABCD$,

$$
\begin{aligned}
\lim_{a\to\infty}\left[\int_{AB}+\int_{CD}\right] &= 0;\\
\left(\lim_{a\to\infty}\right)\int_{DC} &= -\int_{CD} = +\int_{AB};\\
\lim_{a\to\infty}\int_{DC} e^{-z^2}\,dz &= \lim_{a\to\infty}\int_{-\infty+ib}^{+\infty+ib} e^{-z^2}\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [25]

a) [10] Primeiro, calcule a transformada de Laplace de $H(t-a)$, onde $a > 0$, e $H(t)$ é a função de Heaviside — **Calcule a integral!**

b) [15] Agora, obtenha

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}\right\}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{H(t-a)\right\} &= \int_0^\infty H(t-a)e^{-st}\,dt\\ &= \int_a^\infty e^{-st}\,ds\\ &= \frac{e^{-as}}{s}.\end{aligned}$$

Agora, é óbvio que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}\right\} = H(t-1) - H(t-2) \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Considere a função

$$y_1(x) = \frac{1}{x^2}.$$

a) [10] Obtenha a equação diferencial ordinária, linear, homogênea e de ordem 2 com a forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)y = 0$$

da qual $y_1(x)$ é solução.

b) [15] Utilize qualquer técnica que você tenha estudado neste curso, e que seja apropriada, para obter uma segunda solução desta equação, linearmente independente de $y_1(x)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x^2}; \\ y' &= -\frac{2}{x^3}; \\ y'' &= +\frac{6}{x^4}. \end{aligned}$$

Substituindo na forma desejada de equação diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{6}{x^4} + f(x)\frac{1}{x^2} &= 0; \\ f(x)\frac{1}{x^2} &= -\frac{6}{x^4}; \\ f(x) &= -\frac{6}{x^2}. \end{aligned}$$

Portanto, a equação diferencial é

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{6}{x^2}y &= 0, \\ x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 6y &= 0. \end{aligned}$$

Mas esta é uma equação de Euler, com solução da forma $y = x^\alpha$:

$$\begin{aligned} y &= x^\alpha, \\ y' &= \alpha x^{\alpha-1}, \\ y'' &= (\alpha-1)\alpha x^{\alpha-2}. \end{aligned}$$

Substituindo:

$$\begin{aligned} (\alpha-1)\alpha x^\alpha - 6x^\alpha &= 0, \\ (\alpha-1)\alpha - 6 &= 0, \\ \alpha^2 - \alpha - 6 &= 0, \\ \alpha &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 6}}{2} = \begin{cases} -2, \\ +3. \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, de fato a 1ª solução é $y_1(x) = x^{-2}$; a segunda solução LI pedida é $y_2(x) = x^3$. Última verificação:

$$x^2\frac{d^2y_2}{dx^2} - 6y_2 = x^2(6x) - 6x^3 = 0 \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] Utilizando **obrigatoriamente** autovalores, autovetores e um método de diagonalização, resolva:

$$\begin{bmatrix} 11/3 & -5/6 & -1/3 \\ 2/3 & 8/3 & -4/3 \\ -1/3 & 13/6 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) [10] Calcule os autovalores. Mostre que os autovetores são

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= (1, 2, 3), \\ \boldsymbol{e}_2 &= (1, 3/2, 5/4), \\ \boldsymbol{e}_3 &= (1, 2/3, 1/3). \end{aligned}$$

b) [0] (Não vale nada, mas vai lhe poupar tempo!) Verifique que

$$(1, 1, 1) = \frac{1}{4}\boldsymbol{e_1} + \frac{3}{4}\boldsymbol{e_3}.$$

c) [15] Com isto, calcule x, y, z.

Reforçando: é expressamente proibido utilizar qualquer outra técnica de solução de sistemas de equações algébricas lineares!

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
(%i1) a : matrix( [11/3, -5/6, -1/3], [2/3,8/3,-4/3],[-1/3,13/6,-1/3]) ;
                                [ 11      5    1 ]
                                [ --    - -  - - ]
                                [ 3       6    3 ]
                                [                ]
                                [  2    8      4 ]
(%o1)                           [  -    -    - - ]
                                [  3    3      3 ]
                                [                ]
                                [   1  13      1 ]
                                [ - -  --    - - ]
                                [   3  6       3 ]
(%i2) id : matrix([1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]);
                                   [ 1  0  0 ]
                                   [         ]
(%o2)                              [ 0  1  0 ]
                                   [         ]
                                   [ 0  0  1 ]
(%i3) pcarac : determinant(a - lambda*id) ;
                                                      8
                                                      - - lambda
                                                      3           13
                                                      ---------- + --
                    1   8               26   11           3        9
(%o3) ((- lambda - -) (- - lambda) + --) (-- - lambda) - ---------------
                    3   3               9    3                3
                                                                   1
                                                       2 (- lambda - -)
                                                                   3    4
                                                     5 (---------------- - -)
                                                             3           9
                                                   + ------------------------
                                                                6
(%i4) expand(%);
                                  3            2
(%o4)                   - lambda  + 6 lambda  - 11 lambda + 6
(%i5) pcarac : % ;
                                  3            2
(%o5)                   - lambda  + 6 lambda  - 11 lambda + 6
```

Portanto, a equação característica é

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0,$$

que por inspeção possui a raiz $\lambda = 1$. Reduza a ordem da equação algébrica, dividindo o polinômio por $\lambda - 1$:

```
(%i6) divide(pcarac,lambda-1,lambda) ;
                                            2
(%o6)                             [- lambda  + 5 lambda - 6, 0]
```

Continue a solução no verso ⟹

o que significa que a divisão (perfeita) tem como quociente:

$$-\lambda^2 + 5\lambda - 6,$$

cujas raízes são:

```
(%i7) solve(%[1],lambda);
(%o7)                        [lambda = 3, lambda = 2]
```

Ou seja: os autovalores são 1, 2 e 3. Com isto é possível calcular os autovetores. Em `MAXIMA`, isto é bem rápido:

```
(%i8) eigenvectors(a);
                                                       3  5        2  1
(%o8)               [[[1, 2, 3], [1, 1, 1]], [1, 2, 3], [1, -, -], [1, -, -]]
                                                       2  4        3  3
```

mas um cálculo manual também é relativamente fácil:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_1 &= (1, 2, 3),\\ \boldsymbol{e}_2 &= (1, 3/2, 5/4),\\ \boldsymbol{e}_3 &= (1, 2/3, 1/3).\end{aligned}$$

Obtenha agora o vetor $(1, 1, 1)$ na base dos autovetores:

$$(1, 1, 1) = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3.$$

```
(%i9) e1 : [1,2,3] ;
(%o9)                              [1, 2, 3]
(%i10) e2 : [1,3/2,5/4] ;
                                      3  5
(%o10)                            [1, -, -]
                                      2  4
(%i11) e3 : [1,2/3,1/3] ;
                                      2  1
(%o11)                            [1, -, -]
                                      3  3
(%i12) solve( [1,1,1] - a1*e1 - a2*e2 - a3*e3, [a1,a2,a3]);
                                   1              3
(%o12)                     [[a1 = -, a2 = 0, a3 = -]]
                                   4              4
```

Portanto, na base dos autovetores o sistema desacoplado é

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/4\\ 0\\ 3/4\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/4\\ 0\\ 1/4\end{bmatrix}$$

Mas $(x, y, z) = u\boldsymbol{e}_1 + v\boldsymbol{e}_2 + w\boldsymbol{e}_3$, e então:

```
(%i16) [x,y,z] = (1/4)*e1 + (1/4)*e3 ;
                                           1  2  5
(%o16)                       [x, y, z] = [-, -, -]
                                           2  3  6
```

Conferindo:

```
(%i17) a.[1/2,2/3,5/6] ;
                                    [ 1 ]
                                    [   ]
(%o17)                              [ 1 ]
                                    [   ]
                                    [ 1 ]
```

Continue a solução no verso ⟹