TT010 Matemática Aplicada II
P02, 25 Ago 2006
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO

Assinatura: $\mathscr{GABARITO}$

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e LEMBRE-SE: COMECE PELAS MAIS FÁCEIS PARA VOCÊ. PROCURE RESOLVER O MAIOR NÚMERO DE ITENS POSSÍVEL, PARA MAXIMIZAR SUA NOTA. MANTENHA-SE CALMA(O), E PENSE UM POUCO EM QUAL SERÁ A SUA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS. Resolva as questões de forma *LIMPA E ORGANIZADA*, *nos espaços designados*. Boa prova.

---

1 [5,0] Se a FDA de X é

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{b}}, \qquad x \ge a,$$

com $a, b > 0$:

a) [3,0] Obtenha $\mathrm{E}\{X\}$.

b) [2,0] Qual é a faixa de valores admissíveis para b? Por quê?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) A FDP é

$$f_X(x) = \frac{1}{ab}\left(\frac{x}{a}\right)^{-1/b-1}$$

e portanto o valor esperado é

$$\begin{aligned}\langle X\rangle = \mathrm{E}\{X\} &= \int_a^\infty \frac{a}{b}\left(\frac{x}{a}\right)^{-1/b} d\left(\frac{x}{a}\right)\\ &= \frac{a}{b}\frac{1}{-1/b+1}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{-1/b+1}\right]_a^\infty\\ &= \frac{a}{1-b}.\end{aligned}$$

b) Portanto, para que $\mathrm{E}\{x\} \ge a$, é preciso que $0 < b < 1$ ∎

Continue a solução no verso ⟹

2 [5,0] Se X e Y são duas variáveis aleatórias independentes, e

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$
$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j,$$

são as variáveis aleatórias "médias amostrais", calcule a $\operatorname{Cov}\{\overline{X},\overline{Y}\}$. **É obrigatório fazer um desenvolvimento algébrico completo**.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Como sabemos,

$$\left\langle \overline{X} \right\rangle = \langle X \rangle\,,$$
$$\left\langle \overline{Y} \right\rangle = \langle Y \rangle\,.$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}\{\overline{X},\overline{Y}\} &= \left\langle (\overline{X} - \left\langle \overline{X} \right\rangle)(\overline{Y} - \left\langle \overline{Y} \right\rangle) \right\rangle \\
&= \left\langle (\overline{X} - \langle X \rangle)(\overline{Y} - \langle Y \rangle) \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \langle X \rangle \right) \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \langle Y \rangle \right) \right\rangle \\
&= \left\langle \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \langle X \rangle) \right] \left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} (Y_j - \langle Y \rangle) \right] \right\rangle \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle (X_i - \langle X \rangle)(Y_j - \langle Y \rangle) \rangle = 0,
\end{aligned}$$

pois $\langle (X_i - \langle X \rangle)(Y_j - \langle Y \rangle) \rangle = 0$ devido à independência entre X e Y.

Continue a solução no verso ⟹

TT010 Matemática Aplicada II
P03, 15 Set 2006
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: $\mathscr{GABARITO}$

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e LEMBRE-SE: COMECE PELAS MAIS FÁCEIS PARA VOCÊ. PROCURE RESOLVER O MAIOR NÚMERO DE ITENS POSSÍVEL, PARA MAXIMIZAR SUA NOTA. MANTENHA-SE CALMA(O), E PENSE UM POUCO EM QUAL SERÁ A SUA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS. Resolva as questões de forma *LIMPA E ORGANIZADA*, *nos espaços designados*. Boa prova.

1 (2011-10-25T18:09:55 incluída em matappa.tex)[5,0] Seja

$$F(t) = \begin{cases} F_0, & 0 \le t < \frac{T}{2}, \\ 0, & \frac{T}{2} < t \le T, \end{cases}$$

onde F_0 é uma constante. Obtenha os coeficientes c_n de Fourier da série

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}} \\ e^{-\frac{2\pi i m t}{T}} F(t) &= e^{-\frac{2\pi i m t}{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}} \\ e^{-\frac{2\pi i m t}{T}} F(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-\frac{2\pi i m t}{T}} e^{\frac{2\pi i n t}{T}} \\ \int_0^T e^{-\frac{2\pi i m t}{T}} F(t)\, dt &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_0^T e^{-\frac{2\pi i m t}{T}} e^{\frac{2\pi i n t}{T}}\, dt \end{aligned}$$

Neste ponto, note que

$$\int_0^T e^{-\frac{2\pi i m t}{T}} e^{\frac{2\pi i n t}{T}}\, dt = \begin{cases} 0, & m \ne n, \\ T, & m = n. \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-\frac{2\pi i m t}{T}} F(t)\, dt &= c_m T, \\ F_0 \int_0^{T/2} e^{-\frac{2\pi i m t}{T}}\, dt &= c_m T \\ \frac{-F_0}{2\pi \mathrm{i} m} \int_0^{T/2} e^{-\frac{2\pi i m t}{T}} \frac{-2\pi \mathrm{i} m}{T} dt &= c_m \\ \frac{F_0}{2\pi \mathrm{i} m} \left[1 - \exp(-\pi \mathrm{i} m)\right] &= c_m \\ \frac{F_0}{2\pi \mathrm{i} m} \left[1 - (-1)^m\right] &= c_m,\ m \ne 0; \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

ainda é preciso calcular o caso $m = 0$ em separado:

$$\begin{aligned} F_0 \int_0^{T/2} dt &= c_0 T, \\ F_0 \frac{T}{2} &= c_0 T, \\ \frac{F_0}{2} &= c_0 \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [5,0] Se $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi$, obtenha a série de Fourier da *extensão par* de $f(x)$. Dica:

$$\int \operatorname{sen} ax \cos bx \, dx = \frac{1}{2} \int [\operatorname{sen}(a+b)x] \, dx + \frac{1}{2} \int [\operatorname{sen}(a-b)x] \, dx.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A extensão par de $\operatorname{sen}(x)$ é uma função par $f_p(x)$ entre $-\pi$ e $+\pi$; ela possui apenas coeficientes em $\cos \frac{2n\pi x}{2\pi} = \cos(nx)$

Os coeficientes de Fourier são

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f_p(x) \cos(nx) \, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos nx \, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(1+n)x \, dx + \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(1-n)x \, dx \right] \\
&= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{1+n} \cos(1+n)x \bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{1-n} \cos(1-n)x \bigg|_0^{\pi} \right] \\
&= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{(-1)^{1+n} - 1}{1+n} + \frac{(-1)^{1-n} - 1}{1-n} \right] \\
&= -\frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n + 1}{n^2 - 1} \\
&= \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n + 1}{1 - n^2}.
\end{aligned}$$

O caso $n = 1$ precisa ser verificado separadamente; ele dá

$$A_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos x \, dx = 0;$$

além disso, claramente, $A_n = 0$ quando $n > 1$ for ímpar; portanto,

$$A_{2k} = \frac{4}{\pi(1 - 4k^2)}$$

e

$$\operatorname{sen} x = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1 - 4k^2)} \cos(2kx) \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada II
P04, 28 Set 2006
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO

Assinatura: $\mathscr{GABARITO}$

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e LEMBRE-SE: COMECE PELAS MAIS FÁCEIS PARA VOCÊ. PROCURE RESOLVER O MAIOR NÚMERO DE ITENS POSSÍVEL, PARA MAXIMIZAR SUA NOTA. MANTENHA-SE CALMA(O), E PENSE UM POUCO EM QUAL SERÁ A SUA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS. Resolva as questões de forma *LIMPA E ORGANIZADA*, *nos espaços designados*. Boa prova.

1 [5,0] Se $\mathscr{F}[f(x)]$ indica a transformada de Fourier de $f(x)$, prove que

$$\mathscr{F}[f(x-a)] = e^{-ika}\mathscr{F}[f(x)].$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Por definição,

$$\mathscr{F}[f(x-a)] = \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x-a)e^{-ikx}\,dx.$$

Fazendo

$$\xi = x - a,$$

obtém-se

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[f(x-a)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-ik(x-a)-ika}\,d\xi \\
&= e^{-ika}\frac{1}{2\pi}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-ik\xi}\,d\xi \\
&= e^{-ika}\mathscr{F}[f(x)] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [5,0] Observando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} A\delta(k-k_0)e^{ikx}\,dk = Ae^{ik_0x},$$

e **utilizando obrigatoriamente transformadas de Fourier**, resolva:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{z}{L} = Ae^{ik_0x}$$

onde $z(x)$ é uma função complexa de uma variável real.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Note que

$$\mathscr{F}^{-1}\left[A\delta(k-k_0)\right] = Ae^{ik_0x} \Rightarrow \mathscr{F}\left[Ae^{ik_0x}\right] = A\delta(k-k_0).$$

Portanto, a transformada de Fourier da equação diferencial é

$$\begin{aligned}
ik\widehat{z} + \frac{1}{L}\widehat{z} &= A\delta(k-k_0) \\
\widehat{z}\left(ik + \frac{1}{L}\right) &= A\delta(k-k_0) \\
\widehat{z} &= \frac{AL}{ikL+1}\delta(k-k_0) \ \Rightarrow \\
z(x) &= \int_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{AL}{ikL+1}\delta(k-k_0)e^{ikx}\,dx \\
&= \frac{AL}{ik_0L+1}e^{ik_0x} \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada II
P05, 20 Out 2006
Prof. Nelson Luís Dias

NOME: GABARITO

0

Assinatura: ________________________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e LEMBRE-SE: COMECE PELAS MAIS FÁCEIS PARA VOCÊ. PROCURE RESOLVER O MAIOR NÚMERO DE ITENS POSSÍVEL, PARA MAXIMIZAR SUA NOTA. MANTENHA-SE CALMA(O), E PENSE UM POUCO EM QUAL SERÁ A SUA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS. Resolva as questões de forma *LIMPA E ORGANIZADA*, *nos espaços designados*. Boa prova.

---

1 [5,0] Mostre que o operador diferencial da equação de Legendre,

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad -1 < x < 1,$$

é auto-adjunto. Suponha que $y(-1)$ e $y(+1)$ são *valores finitos*, isto é:

$$\lim_{x\to\pm 1} y(x) \neq \pm\infty.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Esta é uma equação diferencial do tipo

$$Ly = -\lambda y;$$

λy é obviamente auto-adjunto, de forma que basta analisar L. Claramente, a função-peso $w(x)$ da teoria de Sturm-Liouville, neste caso, é identicamente igual a 1. Vamos mudar a notação de y para f, multiplicar a equação diferencial por g, e integrar seguidamente por partes:

$$\begin{aligned}
Lf &= (1-x^2)f'' - 2xf',\\
(Lf,g) &= \int_{-1}^{+1}\left[g(1-x^2)f'' - 2xgf'\right]\,dx\\
&= g(1-x^2)f'\Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1}\left(g'(1-x^2)-2xg\right)f'\,dx - \left[2xfg\Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} 2(g+xg')f\,dx\right]\\
&= -2xfg\Big|_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{+1} 2(g+xg')f\,dx - \int_{-1}^{+1}\left(g'(1-x^2)-2xg\right)f'\,dx\\
&= -2xfg\Big|_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{+1} 2(g+xg')f\,dx - \left\{\left[\left(g'(1-x^2)-2xg\right)f\right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1}\left(g''(1-x^2)-4g'x-2g\right)f\,dx\right\}\\
&= \int_{-1}^{+1}\left[g''(1-x^2)-2xg'\right]f\,dx\\
&= (f,Lg)\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [5,0] Ache a função de Green do problema

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = \operatorname{sen} x, \quad y(0) = 3.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Multiplico por $G(\xi, x)$ e integro de 0 a infinito:

$$\int_{\xi=0}^{\infty} G(x,\xi)\left[\frac{dy}{d\xi} - 2\xi y\right] d\xi = \int_0^{\infty} G(x,\xi) \operatorname{sen}\xi \, d\xi$$

Integrando por partes,

$$G(x,\xi)y(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\infty} + \int_{\xi=0}^{\infty} y(\xi)\left[-\frac{\partial G}{\partial \xi} - 2G\right] d\xi = \int_0^{\infty} G(x,\xi)\operatorname{sen}\xi \, d\xi$$

Agora imponho

$$\lim_{\xi\to\infty} G(x,\xi) = 0 \Rightarrow$$
$$-G(x,0)y(0) + \int_{\xi=0}^{\infty} y(\xi)\left[-\frac{\partial G}{\partial \xi} - 2G\right] d\xi = \int_0^{\infty} G(x,\xi)\operatorname{sen}\xi \, d\xi$$

O próximo passo, clássico, é impor

$$-\frac{\partial G}{\partial \xi} - 2G = \delta(\xi - x).$$

Tomando x como um parâmetro, e re-arranjando,

$$\frac{dG}{d\xi} + 2G = -\delta(\xi - x).$$

Agora, $G = uv$, e

$$\begin{aligned}
u\left[\frac{dv}{d\xi} + 2v\right] + v\frac{du}{d\xi} &= -\delta(\xi - x)\\
\frac{dv}{d\xi} &= -2v\\
\frac{dv}{2v} &= -2\xi\\
\ln\left(\frac{v}{v_0(x)}\right) &= -\xi^2\\
v &= v_0(x)\exp(-\xi^2)\\
\frac{du}{d\xi} &= -\frac{\exp(\xi^2)}{v_0(x)}\delta(\xi - x)\\
u(\xi) &= u_0(x) - \int_{\eta=0}^{\xi} \frac{\exp(\eta^2)}{v_0(x)}\delta(\eta - x)\, d\eta\\
&= u_0(x) - \frac{H(\xi - x)\exp(x^2)}{v_0(x)} \Rightarrow\\
G(x,\xi) &= \left[u_0(x)v_0(x) - H(\xi - x)\exp(x^2)\right]\exp(-\xi^2) = \left[G_0(x) - H(\xi - x)\exp(x^2)\right]\exp(-\xi^2).
\end{aligned}$$

Mas

$$\lim_{\xi\to\infty} G(x,\xi) = 0 \Rightarrow G_0(x) = \exp(x^2)$$
$$G(x,\xi) = [1 - H(\xi - x)]\exp(x^2 - \xi^2) \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada II
P06, 10 Nov 2006
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ______________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e LEMBRE-SE: COMECE PELAS MAIS FÁCEIS PARA VOCÊ. PROCURE RESOLVER O MAIOR NÚMERO DE ITENS POSSÍVEL, PARA MAXIMIZAR SUA NOTA. MANTENHA-SE CALMA(O), E PENSE UM POUCO EM QUAL SERÁ A SUA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS. Resolva as questões de forma *LIMPA E ORGANIZADA*, *nos espaços designados*. Boa prova.

---

1 [5,0] Dada a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{2t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

mostre que a transformação de similaridade

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{t}}$$

transforma-a em uma equação diferencial ordinária. Tente especificar condições iniciais e de contorno em $t = 0$, $x = 0$ e $x \to \infty$ que permitam a solução de similaridade, ou seja: que sejam compatíveis com a equação diferencial ordinária. É possível?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Se

$$\eta = xt^{-1/2},$$

então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \eta}{\partial t} &= -\frac{1}{2}xt^{-3/2} = -\frac{1}{2}(xt^{-1/2})t^{-1} = -\frac{\eta}{2t},\\
\frac{\partial \eta}{\partial x} &= t^{-1/2}.
\end{aligned}$$

As derivadas parciais de u são

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{du}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\eta}{2t}\frac{du}{d\eta};\\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{du}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{du}{d\eta}t^{-1/2};\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{du}{d\eta}t^{-1/2}\right) = t^{-1/2}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{du}{d\eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{t}\frac{d^2u}{d\eta^2}.
\end{aligned}$$

Levando estes resultados à equação diferencial parcial original,

$$\begin{aligned}
-\frac{\eta}{2t} + \frac{u}{2t} &= \frac{\nu}{t}\frac{d^2u}{d\eta^2}\\
-\eta\frac{du}{d\eta} + u &= 2\nu\frac{d^2u}{d\eta^2}\\
2\nu\frac{d^2u}{d\eta^2} + \eta\frac{du}{d\eta} - u &= 0.
\end{aligned}$$

Esta é uma equação de coeficientes não constantes, mas ninguém está pedindo para você resolvê-la! Note que $\lim_{t\to 0}\eta = \lim_{x\to\infty}\eta = \infty$, $\lim_{x\to 0}\eta = 0$. Para que seja possível resolver a equação diferencial parcial utilizando

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

o método de transformação de similaridade, é preciso que as duas primeiras condições sejam idênticas. Por exemplo,

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= u_0, \\
u(0,t) &= u_1, \\
u(\infty,t) &= u_0 \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [5,0] Resolva a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

para o retângulo $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ e condições de contorno

$$\phi(0,y) = 0, \qquad \phi(x,0) = 0,$$
$$\phi(a,y) = \phi_0, \qquad \phi(x,b) = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Nós utilizamos a abordagem clássica de separação de variáveis:

$$\phi(x,y) = X(x)Y(y),$$

donde

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \lambda.$$

Observe as condições de contorno do problema: elas são homogêneas na direção y. Isto sugere tentar resolver um problema de autovalor em Y:

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \lambda y = 0.$$

A discussão dos sinais de λ é como se segue:

Se $\lambda < 0$:

$$\begin{aligned}
Y(y) &= A\cosh(\sqrt{-\lambda}y) + B\,\mathrm{senh}(\sqrt{-\lambda}y).\\
Y(0) &= 0 \;\Rightarrow\; A = 0,\\
Y(b) &= 0 \;\Rightarrow\; B\,\mathrm{senh}(\sqrt{-\lambda}b) = 0 \;\Rightarrow\; B = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, para $\lambda < 0$ a solução é trivial, e não nos interessa.

Se $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned}
Y(y) &= A + By.\\
Y(0) &= 0 \;\Rightarrow\; A = 0,\\
Y(b) &= 0 \;\Rightarrow\; Bb = 0 \;\Rightarrow\; B = 0.
\end{aligned}$$

Novamente, a solução é trivial, e $\lambda = 0$ não interessa.

Se $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned}
&Y(y) = A\cos(\sqrt{\lambda}y) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}y)\\
&Y(0) = 0 \;\Rightarrow\; & A &= 0,\\
&Y(b) = 0 \;\Rightarrow\; & B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}y) &= 0,\\
& & \sqrt{\lambda}b &= n\pi,\; n = 1,2,3,\ldots,\\
& & \sqrt{\lambda} &= \frac{n\pi}{b},\\
& & \lambda &= \frac{n^2\pi^2}{b^2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, a solução é não-trivial, e nos interessa. As autofunções portanto são

$$Y_n(y) = \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Vamos agora então olhar para X; para λ acima,

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{n^2\pi^2}{b^2},$$
$$\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{n^2\pi^2}{b^2}X = 0,$$
$$X_n(x) = C_n \cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) + D_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi x}{b}\right)$$

Os valores de C_n e D_n devem agora ser obtidos a partir das condições de contorno não-homogêneas na direção x. Faça

$$\phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n \cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) + D_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\right]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Agora,

$$\phi(0,y) = 0 \Rightarrow 0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \Leftrightarrow C_n = 0, n = 1,2,3,\ldots.$$

Resta a obtenção de D_n:

$$\phi(a,y) = \phi_0 \Rightarrow \phi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Atenção: esta é uma série de Fourier *em y*:

$$\int_{y=0}^{b} \phi_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\,dy = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{y=0}^{b} D_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\,dy$$
$$= \int_{y=0}^{b} D_m \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi a}{b}\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\,dy \Rightarrow$$
$$\frac{\phi_0 b}{m\pi}\left[1-(-1)^m\right] = D_m \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi a}{b}\right)\frac{b}{2}.$$

Portanto, $D_m \neq 0$ apenas para $m = 1,3,5,\ldots$; a solução será

$$\phi(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \operatorname{senh}\left(\frac{(2k-1)\pi x}{b}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi y}{b}\right),$$

com

$$D_k = \frac{4\phi_0}{(2k-1)\operatorname{senh}\left(\frac{(2k-1)\pi a}{b}\right)} \blacksquare$$

Uma questão muito interessante, é a seguinte: é possível resolver a questão "ao contrário", ou seja: é possível resolver *primeiro* um problema de autovalor em x? A resposta é *sim*! Tente

$$\phi(x,y) = \frac{\phi_0 x}{a} + \psi(x,y);$$

é fácil ver que as condições de contorno em ψ tornam-se

$$\psi(0,y) = 0, \qquad \psi(x,0) = -\frac{\phi_0 x}{a},$$
$$\psi(a,y) = 0, \qquad \psi(x,b) = -\frac{\phi_0 x}{a}.$$

Este é um problema mais difícil que o anterior, mas o ponto a ser notado é que ele é um problema *homogêneo* em x. As condições de contorno homogêneas em x levarão (após o costumeiro estudo dos sinais de λ, etc.) aos autovalores e às autofunções

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2},$$
$$X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right),$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

donde a forma geral da solução será

$$\phi(x,y) = \frac{\phi_0 x}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + D_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right).$$

Agora, os valores de C_n e D_n virão das condições de contorno na direção y:

$$\begin{aligned}
\phi(x,0) = 0 &= \frac{\phi_0 x}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \\
-\frac{\phi_0 x}{a} &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \\
-\int_{x=0}^{a} \frac{\phi_0 x}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\, dx &= \int_{x=0}^{a} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\, dx \\
\frac{a\phi_0}{m\pi}(-1)^{m+1} &= \frac{C_m a}{2} \\
C_m &= \frac{2\phi_0}{m\pi}(-1)^{m+1}.
\end{aligned}$$

Tendo obtido os C_n's, nós agora buscamos os D_n's:

$$\begin{aligned}
\phi(x,b) = 0 &= \frac{\phi_0 x}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\phi_0}{n\pi}(-1)^{n+1} \cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) + D_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \\
-\frac{\phi_0 x}{a} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\phi_0}{n\pi}(-1)^{n+1} \cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) + D_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \\
-\int_{x=0}^{a} \frac{\phi_0 x}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\, dx &= \int_{x=0}^{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\phi_0}{n\pi}(-1)^{n+1} \cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) + D_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\, dx \\
\frac{a\phi_0}{m\pi}(-1)^{m+1} &= \left[\frac{2\phi_0}{m\pi}(-1)^{m+1} \cosh\left(\frac{m\pi b}{a}\right) + D_m \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi b}{a}\right)\right] \frac{a}{2} \\
\frac{2\phi_0}{m\pi}(-1)^{m+1} &= \left[\frac{2\phi_0}{m\pi}(-1)^{m+1} \cosh\left(\frac{m\pi b}{a}\right) + D_m \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi b}{a}\right)\right] \\
D_m &= \frac{2\phi_0}{m\pi}(-1)^{m+1} \left[1 - \cosh\left(\frac{m\pi b}{a}\right)\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TT010 Matemática Aplicada II
F, 04 Dez 2006
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e LEMBRE-SE: COMECE PELAS MAIS FÁCEIS PARA VOCÊ. PROCURE RESOLVER O MAIOR NÚMERO DE ITENS POSSÍVEL, PARA MAXIMIZAR SUA NOTA. MANTENHA-SE CALMA(O), E PENSE UM POUCO EM QUAL SERÁ A SUA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS. Resolva as questões de forma *LIMPA E ORGANIZADA*, *nos espaços designados*. Boa prova.

---

1 [2,5] Seja $f_X(x)$ a função densidade de probabilidade da variável aleatória X. Por definição, a *função característica* de X é a Transformada de Fourier de f_X:

$$\widehat{f}_X(k) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left\langle e^{-ikX}\right\rangle.$$

A função característica de uma função $Y = g(X)$, por conseguinte, é

$$\widehat{f}_Y(k) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)e^{-ikg(x)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left\langle e^{-ikg(X)}\right\rangle.$$

Finalmente, se $Z = g(X,Y)$, a função característica de Z é

$$\widehat{f}_Z(k) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty}\int_{y=-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)e^{-ikg(x,y)}\,dy\,dx = \frac{1}{2\pi}\left\langle e^{-ikg(X,Y)}\right\rangle.$$

a) [1,5] Seja agora $Z = g(X,Y) = X+Y$, onde X e Y são duas variáveis aleatórias independentes (portanto, $f_{X,Y}(x,y) =?$); insira este g na expressão acima, e calcule $\widehat{f}_Z$.

b) [1,0] Use o Teorema da Convolução,

$$\mathscr{F}\left[f_X * f_Y\right] = 2\pi\widehat{f}_X(k)\widehat{f}_Y(k),$$

para calcular agora uma expressão para $f_Z(z)$ em função de f_X e de f_Y.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) Como X e Y são independentes, $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$; então,

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_Z(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty}\int_{y=-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(y)e^{-ik(x+y)}\,dy\,dx \\
&= 2\pi\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)e^{-ikx}\,dx\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)e^{-iky}\,dy\right] \\
&= 2\pi\widehat{f}_X(k)\widehat{f}_Y(k).
\end{aligned}$$

b) Olhando agora para o teorema da convolução,

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \mathscr{F}^{-1}\left[\widehat{f}_Z(k)\right] \\
&= \mathscr{F}^{-1}\left[2\pi\widehat{f}_X(k)\widehat{f}_Y(k)\right] \\
&= \mathscr{F}^{-1}\left[\mathscr{F}\left[f_X(x) * f_Y(y)\right]\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-\xi)f_Y(\xi)\,d\xi \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [2,5] Utilizando obrigatoriamente transformada de Fourier, resolva:

$$b\phi + \frac{\partial \phi}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \qquad \phi(x,0) = m\delta(x).$$

Observação: um resultado muito útil, que você pode utilizar sem ter que provar, é

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ak^2+ikx}\,dk = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(kx)e^{-ak^2}\,dk = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{x^2}{4a}}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Inicialmente, calculo a transformada de Fourier das condições iniciais:

$$\widehat{\phi}_0 = \widehat{\phi}(k,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} m\delta(x)e^{-ikx} = \frac{m}{2\pi}.$$

Agora, transformo a equação diferencial parcial:

$$b\widehat{\phi} + \frac{d\widehat{\phi}}{dt} = D(ik)^2\widehat{\phi},$$
$$\frac{d\widehat{\phi}}{dt} + (b + Dk^2)\widehat{\phi} = 0.$$

A solução desta equação para $\widehat{\phi}$ é trivial:

$$\begin{aligned}
\frac{d\widehat{\phi}}{\widehat{\phi}} &= -(b + Dk^2)dt,\\
\ln\frac{\widehat{\phi}}{\widehat{\phi}_0} &= -(b + Dk^2)t,\\
\widehat{\phi}(k,t) &= \widehat{\phi}(k,0)e^{-(b+Dk^2)t}\\
&= \frac{m}{2\pi}e^{-bt}e^{-Dk^2t}.
\end{aligned}$$

Agora basta calcular a inversa:

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi}(x,t) &= \frac{m}{2\pi}e^{-bt}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Dk^2t}e^{ikx}\,dk\\
&= \frac{m}{2\pi}e^{-bt}\sqrt{\frac{\pi}{Dt}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\\
&= \frac{me^{-bt}}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [2,5] Obtenha uma série de Fourier contendo apenas senos que aproxime a função $f(x) = x^2$ no intervalo [0,1].

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Existem diversas formas de atacar o problema. Uma que não requer praticamente nenhuma memorização é a seguinte:

$$
\begin{aligned}
x^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{1}\right) \qquad \text{(ou seja: } L = 1) \\
x^2 \operatorname{sen}(m\pi x) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{sen}(m\pi x)
\end{aligned}
$$

Se L estiver certo, as funcões são ortogonais:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{sen}(m\pi x)\, dx &= 0, && m \neq n, \\
\int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{sen}(m\pi x)\, dx &= \frac{1}{2}, && m = n.
\end{aligned}
$$

(OK). Portanto, integre:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x^2 \operatorname{sen}(m\pi x)\, dx &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{sen}(m\pi x)\, dx \\
\int_0^1 x^2 \operatorname{sen}(m\pi x)\, dx &= \frac{B_m}{2} \\
\frac{\left(\pi^2 m^2 - 2\right) (-1)^m}{\pi^3 m^3} - \frac{2}{\pi^3 m^3} &= \frac{B_m}{2} \\
B_m &= \frac{2\left(\pi^2 m^2 - 2\right) (-1)^m}{\pi^3 m^3} - \frac{4}{\pi^3 m^3} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [2,5] Integrais e covariâncias:

a) [0,5] Seja

$$G(a) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx.$$

Vá para a questão 2; mostre que $G(a) = ?$ pode ser obtida como um caso particular da integral dada no enunciado daquela questão.

b) [0,5] Calcule:

$$G''(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-ax^2}\,dx = ?$$

c) [1,5] Seja X uma variável aleatória com distribuição normal

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2};$$

usando os resultados dos itens anteriores, calcule $\mathrm{Cov}\{X, X^3\}$. Note que $\langle X \rangle = \left\langle X^3 \right\rangle = 0$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) Na 2ª questão, faça $x = 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ak^2}\,dk = \sqrt{\frac{\pi}{a}} = G(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx.$$

b) Derivando duas vezes G em relação a a:

$$G''(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-ax^2}\,dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} a^{-5/2}.$$

c) Finalmente,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\{X, X^3\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle X \rangle)(x^3 - \left\langle X^3 \right\rangle) f_X(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-x^2}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} = \frac{3}{4}\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$