TT010 Matemática Aplicada II
P01, 12 Ago 2005
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

---

1 [2,0] Expanda a definição

$$\mathrm{Var}\{X\} \equiv \left\langle (X - \langle X \rangle)^2 \right\rangle$$

e obtenha uma expressão para $\mathrm{Var}\{X\}$ em função de $\langle X \rangle$ e de $\left\langle X^2 \right\rangle$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\{X\} &\equiv \left\langle (X - \langle X \rangle)^2 \right\rangle \\
&= \left\langle (X^2 - 2X\langle X \rangle + \langle X \rangle^2) \right\rangle \\
&= \left\langle X^2 \right\rangle - 2\langle X \rangle \langle X \rangle + \langle X \rangle^2 \\
&= \left\langle X^2 \right\rangle - \langle X \rangle \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [5,0] Se

$$f_X(x) = \alpha \exp(-\alpha x), \qquad x \geq 0,$$

é a f.d.p. da distribuição *exponencial* de probabilidades,

a) [3,0] Encontre seus três primeiros momentos em relação à origem,

$$M_{0,n} = \int_{x=0}^{\infty} x^n f_X(x)\,dx, \qquad n = 1, 2, 3.$$

b) [2,0] Calcule o coeficiente de variação CV e o coeficiente de assimetria γ desta distribuição.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Existem várias possíveis. Eis a minha: sei que

$$\int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha x}\,dx = 1;$$

Faço com que isto seja uma função de α:

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha x}\,dx = 1;$$

então

$$F'(\alpha) = 0 = \int_0^{\infty} \left(e^{-\alpha x} - \alpha x e^{-\alpha x}\right)\,dx \;\Rightarrow$$
$$\int_0^{\infty} \alpha x e^{-\alpha x}\,dx = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha},$$

ou seja:

$$\mathrm{E}\{X\} = M_{0,1} = \int_0^{\infty} x\alpha e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}.$$

Repito para o segundo momento:

$$\int_0^{\infty} x\alpha e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha},$$
$$\int_0^{\infty} x\left[e^{-\alpha x} - \alpha x e^{-\alpha x}\right]\,dx = -\frac{1}{\alpha^2},$$
$$\int_0^{\infty} x e^{-\alpha x}\,dx - \int_0^{\infty} x^2\alpha e^{-\alpha x}\,dx = -\frac{1}{\alpha^2},$$
$$\frac{1}{\alpha^2} - \int_0^{\infty} x^2\alpha e^{-\alpha x}\,dx = -\frac{1}{\alpha^2},$$
$$\left\langle X^2\right\rangle = M_{0,2} = \int_0^{\infty} x^2\alpha e^{-\alpha x}\,dx = \frac{2}{\alpha^2}.$$

E finalmente para o terceiro:

$$\int_0^{\infty} x^2\left[e^{-\alpha x} - x\alpha e^{-\alpha x}\right]\,dx = -\frac{4}{\alpha^3},$$
$$\frac{2}{\alpha^3} - \int_0^{\infty} x^3\alpha e^{-\alpha x}\,dx = -\frac{4}{\alpha^3},$$
$$\left\langle X^3\right\rangle = M_{0,3} = \int_0^{\infty} x^3\alpha e^{-\alpha x}\,dx = \frac{6}{\alpha^3}.$$

Uma alternativa *muito* inteligente que muitos de vocês adotaram é usar a função gama:

$$\Gamma(u) \equiv \int_0^{\infty} t^{u-1}e^{-t}\,dt,$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

donde

$$
\begin{aligned}
M_{0,n} &= \int_{x=0}^{\infty} x^n \alpha e^{-\alpha x}\, dx \\
&= \frac{1}{\alpha^n} \int_{\alpha x=0}^{\infty} (\alpha x)^n e^{-\alpha x}\, d(\alpha x) \\
&= \frac{1}{\alpha^n} \Gamma(n+1);
\end{aligned}
$$

assim

$$
\begin{aligned}
M_{0,1} &= \frac{1}{\alpha}\Gamma(2) = \frac{1}{\alpha}, \\
M_{0,2} &= \frac{1}{\alpha^2}\Gamma(3) = \frac{2}{\alpha^2}, \\
M_{0,3} &= \frac{1}{\alpha^3}\Gamma(4) = \frac{6}{\alpha^3}.
\end{aligned}
$$

Agora, para calcular os coeficientes de variação e de assimetria eu necessito dos momentos *centrais*, e não em relação à origem; o segundo momento central e o coeficiente de varição são:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}\{X\} &= \left\langle X^2 \right\rangle - \langle X \rangle^2 = \frac{2}{\alpha^2} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}, \\
\mathrm{CV} &= \frac{\sqrt{\mathrm{Var}\{X\}}}{\langle X \rangle} = \frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha}} = 1.
\end{aligned}
$$

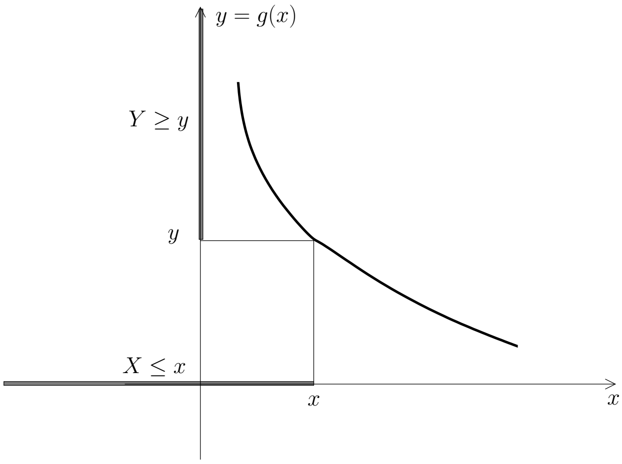
O terceiro momento central e o coeficiente de assimetria são

$$
\begin{aligned}
\left\langle (X - \langle X \rangle)^3 \right\rangle &= \left\langle (X^3 - 3X^2 \langle X \rangle + 3X \langle X \rangle^2 - \langle X \rangle^3) \right\rangle \\
&= \left\langle X^3 \right\rangle - 3 \langle X \rangle \left\langle X^2 \right\rangle + 3 \langle X \rangle^3 - \langle X \rangle^3 \\
&= \left\langle X^3 \right\rangle - 3 \langle X \rangle \left\langle X^2 \right\rangle + 2 \langle X \rangle^3 \\
&= \frac{6}{\alpha}^3 - \frac{3}{\alpha}\frac{2}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} \\
&= \frac{2}{\alpha^3}; \\
\gamma &= \frac{\left\langle (X - \langle X \rangle)^3 \right\rangle}{(\mathrm{Var\{X\}})^{3/2}} = \frac{\frac{2}{\alpha^3}}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3} = 2 \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [3,0] Se $Y = g(X)$, onde X é uma variável aleatória com f.d.p. $f_X(x)$, **e se $g(x)$ é uma função estritamente *decrescente***, obtenha a fórmula geral para a f.d.p. $f_Y(y)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:



A figura acima mostra claramente que o conjunto $X \leq x$ é mapeado no conjunto $Y \geq y = g(x)$ no caso de uma função estritamente decrescente; portanto,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\{Y \geq g(x)\} = \mathrm{P}\{X \leq x\}, \\
&1 - F_Y(g(x)) = F_X(x), \\
&-f_Y(g(x))\frac{dg}{dx} = f_X(x) \;\Rightarrow\; f_Y(y) = -\frac{1}{\frac{dg}{dx}} f_X(x) \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada II
P02, 26 Ago 2005
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

---

1 [2,0] Se X e Y são duas variáveis aleatórias independentes, **prove que**

$$\operatorname{Var}\{X - Y\} = \operatorname{Var}\{X\} + \operatorname{Var}\{Y\}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A variância da soma de duas variáveis aleatórias independentes é igual à soma das variâncias:

$$\operatorname{Var}\{X - Y\} = \operatorname{Var}\{X\} + \operatorname{Var}\{-Y\}.$$

Agora,

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\{bY\} &= b^2\operatorname{Var}\{Y\} \Rightarrow\\ \operatorname{Var}\{-Y\} &= \operatorname{Var}\{Y\}\end{aligned}$$

e portanto

$$\operatorname{Var}\{X - Y\} = \operatorname{Var}\{X\} + \operatorname{Var}\{Y\} \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [4,0] Duas campanhas X e Y de medição de O_2 dissolvido foram realizadas em um rio. Em cada campanha, foram feitas 20 medições mostradas na tabela a seguir. As campanhas foram realizadas antes e depois da implantação de um sistema de tratamento de água a montante do ponto de medição, de forma que a média do O_2 medido na segunda campanha *deveria* ser maior. Mas você é um fiscal do meio-ambiente, e quer ter certeza. Suponha que o desvio-padrão do erro de cada medida individual é igual a 2 mg/l. **Faça a hipótese de que a média não mudou, e que portanto a média da diferença $Z = X - Y$ é nula**.

a) [1,0] Diga qual é a distribuição de $\overline{Z}$.

b) [1,0] Diga qual é a variância de $\overline{Z}$.

c) [2,0] Calcule $\overline{z}$, posicione-o na distribuição que você supôs, e dê o seu veredito: em sua opinião a média mudou ou não? (Você não precisa de nenhuma tabela de distribuição de probabilidades, nem de nenhuma função probabilística em sua calculadora. Em vez disto, seja **simples**: se $\overline{z}$ caiu a mais de dois desvios-padrão de zero, isto é um resultado altamente improvável debaixo da hipótese nula!)

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Vale a pena comentar como esta questão foi *feita*. Com o seguinte código de MAXIMA,

```
load(bessel);
for k : 1 thru 40 do (
   print(gauss(5,2))
);
quit();
```

eu gerei 40 realizações de uma distribuição normal com média 5 e desvio-padrão 2. Por *mero acaso*, a média amostral das 20 primeiras ($\overline{x}$) é 4.59, e a média amostral das 20 últimas ($\overline{y}$) é um pouco maior, 5.13. Com isto, uma análise apressada pode levar à conclusão errônea de que o O_2 dissolvido aumentou, ou seja: de que o tratamento de água funcionou. Note entretanto que eu gerei os dados, propositadamente, com a mesma média e que portanto uma análise estatística deve (com grande probabilidade) concluir pela não-modificação da média. Agora vamos à solução.

x	y	z	$(z-\overline{z})^2$
5.65	6.04	−0.39	0.0216
1.21	3.51	−2.30	3.1082
4.38	6.31	−1.93	1.9404
7.07	7.28	−0.21	0.1069
0.31	3.31	−3.00	6.0664
2.34	2.63	−0.29	0.0610
5.08	6.19	−1.11	0.3283
3.18	4.12	−0.94	0.1624
6.06	3.30	2.76	10.8702
2.95	3.68	−0.73	0.0372
4.37	4.80	−0.43	0.0114
5.76	4.45	1.31	3.4114
6.75	6.66	0.09	0.3931
8.83	5.93	2.90	11.8130
3.35	9.58	−6.23	32.4102
9.04	4.75	4.29	23.2999
3.72	5.11	−1.39	0.7276
3.10	6.21	−3.11	6.6203
4.76	1.05	3.71	18.0370
3.94	7.68	−3.74	10.2592
$\sum$		−10.74	129.69

Continue a solução no verso ⟹

a) A média amostral $\overline{z} = (\sum_{i=1}^{20} z_i)/20$ possui distribuição muito proximamente normal, devido ao teorema do limite central.
b) Estritamente falando, o enunciado já dá a variância de $\overline{Z}$. Note que $\mathrm{Var}\{Z\} = \mathrm{Var}\{X\} + \mathrm{Var}\{Y\} = 4 + 4 = 8\,\mathrm{mg/l}$. Portanto, $\mathrm{Var}\{\overline{Z}\} = 8/20 = 0.4$, e $\sigma_{\overline{z}} = 0.6324$.
c) A tabela acima mostra o cálculo de $z = x - y$, $(z - \overline{z})^2$, e de suas somas; a partir dela obtemos a média e o desvio-padrão amostrais:

$$\overline{z} = \frac{-10.74}{20} = -0.5370,$$
$$s_z = \sqrt{\frac{129.69}{19}} = 2.6126.$$

Conseqüentemente, o *desvio-padrão amostral da média* é

$$s_{\overline{z}} = \frac{s_z}{\sqrt{20}} = 0.5842,$$

o qual, por mero acaso, é um pouco menor que o desvio-padrão de população $\sigma_{\overline{z}}$. Note que a média amostral -0.5370 está a menos de dois (na verdade, a menos de um) desvios-padrão de população de zero:

$$-2 \times 0.6324 \leq -0.5370 \leq +2 \times 0.6324.$$

Não é possível rejeitar a hipótese nula de igualdade das médias, e somos levados a concluir que a concentração de O_2 *não* mudou. O mesmo resultado teria sido encontrado se a análise tivesse utilizado o desvio-padrão amostral $s_{\overline{z}}$.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [4,0] A função distribuição acumulada (FDA) da distribuição exponencial de dois parâmetros é

$$F_X(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x-x_0}{\lambda}\right), \qquad x \ge x_0.$$

a) [2,0] **Prove usando integração que** $\langle X \rangle = x_0 + \lambda$ e $\mathrm{Var}\{X\} = \lambda^2$.

b) [2,0] Use o método dos momentos com os resultados do item (a) e a tabela abaixo para calcular x_0 e λ, e ajustar a exponencial de dois parâmetros às vazões máximas em Tucuruí a partir do registro de dados de 1970–1982. Qual é a vazão com tempo de retorno de 10.000 anos?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A função densidade de probabilidade da exponencial de 2 parâmetros é

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = \frac{1}{\lambda}\exp\left(-\frac{x-x_0}{\lambda}\right),$$

donde

$$\langle X \rangle = \int_{x_0}^{\infty} x\frac{1}{\lambda}\exp\left(-\frac{x-x_0}{\lambda}\right)\,dx = x_0 + \lambda,$$

$$\mathrm{Var}\{X\} = \int_{x_0}^{\infty} (x - x_0 - \lambda)^2\frac{1}{\lambda}\exp\left(-\frac{x-x_0}{\lambda}\right)\,dx = \lambda^2 \;\blacksquare$$

(No *seu* caso, não basta montar as integrais e depois igualar ao resultado dado no enunciado! É preciso mostrar que sabe calculá-las.)

Agora nós estendemos a tabela de máximos para o cálculo da média e da variância amostrais:

Ano	x	$(x-\overline{x})^2)$
1970	34100	5.2290E+006
1971	18000	3.3807E+008
1972	22300	1.9843E+008
1973	27900	7.2024E+007
1974	42500	3.7373E+007
1975	31000	2.9016E+007
1976	20300	2.5878E+008
1977	35900	2.3687E+005
1978	47200	1.1693E+008
1979	47600	1.2574E+008
1980	68300	1.0185E+009
1981	36400	1.7709E+002
1982	41527	2.6423E+007
$\sum$	473027	2.2267E+009

Portanto,

$$\overline{x} = \frac{473027}{13} = 36386.69,$$

$$s_x = \sqrt{\frac{2.2267\times 10^9}{12}} = 13622.02.$$

Os estimadores de λ e de x_0 pelo método dos momentos, portanto, são

$$\widehat{\lambda} = s_x = 13622.02,$$

$$\widehat{x}_0 = \overline{x} - \widehat{\lambda} = 36386.69 - 13622.02 = 22764.67.$$

(Incidentalmente, note a inconsistência da aplicação do método dos momentos neste caso: alguns dos valores amostrais de x são *menores* do que $\widehat{x}_0$!)

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Finalmente, o cálculo da vazão com tempo de retorno de 10.000 anos:

$$
\begin{aligned}
\frac{9999}{1000} &= 1 - \exp\left(-\frac{x_{10000} - 22764.67}{13622.02}\right), \\
\exp\left(-\frac{x_{10000} - 22764.67}{13622.02}\right) &= \frac{1}{1000} \\
\frac{x_{10000} - 22764.67}{13622.02} &= 9.2103 \\
x_{10000} &= 22764.67 + 9.2103 \times 13622.02 = 148228.11\,\mathrm{m^3\,s^{-1}} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada II
P03, 16 Set 2005
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

---

1 [5,0] (2011-10-02T11:45:15 não incluída em matappa.tex, porque já há um exemplo igual no texto)**CUIDADO! ESTE ENUNCIADO É LONGO! LEIA COM ATENÇÃO.** Sabendo que um produto interno em um espaço vetorial $\mathbb{V}$ e um campo escalar complexo $\mathbb{C}$ deve possuir obrigatoriamente as propriedades

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) &\geq 0, \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{V},\\
(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) &= 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0},\\
(\boldsymbol{u},\alpha\boldsymbol{v}) &= \alpha(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}), \forall \alpha \in \mathbb{C} \text{ e } \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbb{V},\\
(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) &= (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}), \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in \mathbb{V},\\
(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) &= (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^*,
\end{aligned}
$$

considere o espaço vetorial formado pelas n-uplas ordenadas de números complexos:

$$
\mathbb{V} = \{\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n), u_i \in \mathbb{C}\}.
$$

Mostre (ou seja: **prove**) que

$$
(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} u_i^* v_i
$$

é um produto interno legítimo de $\mathbb{V}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$
(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} v_i^* v_i = \sum_{i=1}^{n} |v_i|^2 \geq 0.
$$

b)

$$
\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2 = 0 \iff |v_i|^2 = 0\ \forall i \iff v_i = 0\ \forall i \iff \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}.
$$

c)

$$
(\boldsymbol{u},\alpha\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} u_i^* \alpha v_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} u_i^* v_i = \alpha(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}).
$$

d)

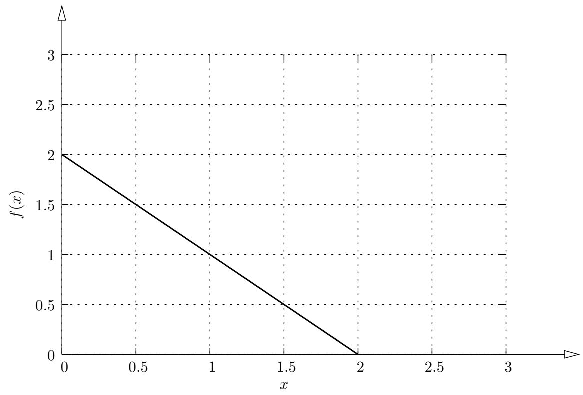
$$
(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \sum_{i=1}^{n} u_i^*(v_i + w_i) = \sum_{i=1}^{n} (u_i^* v_i + u_i^* w_i) = \sum_{i=1}^{n} u_i^* v_i + \sum_{i=1}^{n} u_i^* w_i = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}).
$$

e)

$$
(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{n} v_i^* u_i = \sum_{i=1}^{n} (u_i^* v_i)^* = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^* v_i\right)^* = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^* \blacksquare
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [5,0] Para a função $f(x)$ mostrada na figura em linha grossa, e definida no intervalo $[0,2]$, obtenha a série de Fourier da sua extensão *ímpar* em $[-2,+2]$.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Seja $f_I(x)$ a extensão ímpar de $f(x)$, definida por

$$f_I(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \geq 2, \\ 0, & x = 0, \\ -f(-x), & -2 \leq x < 0. \end{cases}$$

A série de Fourier de $f_I(x)$ contém apenas senos:

$$f_I(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{2\pi n x}{L}$$

onde $L = 4$, e

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f_I(x) \operatorname{sen} \frac{2\pi n x}{L}\, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} f_I(x) \operatorname{sen} \frac{\pi n x}{2}\, dx \\ &= \int_{0}^{2} f(x) \operatorname{sen} \frac{\pi n x}{2}\, dx \end{aligned}$$

Mas $f(x) = 2 - x$, e portanto

$$b_n = \int_0^2 (2-x) \operatorname{sen} \frac{\pi n x}{2}\, dx = \frac{4}{\pi n}.$$

Portanto, a série de fourier da extensão ímpar de $f(x)$ é

$$f_I(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n} \operatorname{sen} \frac{\pi n x}{2} \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada II
P04, 30 Set 2005
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ______________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e LEMBRE-SE: COMECE PELAS MAIS FÁCEIS PARA VOCÊ. PROCURE RESOLVER O MAIOR NÚMERO DE ITENS POSSÍVEL, PARA MAXIMIZAR SUA NOTA. MANTENHA-SE CALMA(O), E PENSE UM POUCO EM QUAL SERÁ A SUA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS. Resolva as questões de forma *LIMPA E ORGANIZADA*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

---

1 [10,0] A distribuição delta de Dirac, $\delta(x)$, possui a propriedade bem conhecida

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) f(x)\, dx = f(a).$$

a) [5,0] Utilize a propriedade acima para calcular a transformada de Fourier de $\delta(x)$,

$$\mathscr{F}[\delta(x)] = \widehat{\delta}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-\mathrm{i}kx}\, dx.$$

b) [5,0] Sabendo agora que

$$H(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} \delta(\xi)\, d\xi,$$

e utilizando ***obrigatoriamente*** a propriedade

$$\mathscr{F}[f'(x)] = \mathrm{i}k\widehat{f}(k),$$

obtenha $\mathscr{F}[H(x)] = \widehat{H}(k)$. **Dica:** é óbvio que você tem que usar o fato de que a $\delta(x)$ é a derivada (no sentido amplo da teoria das distribuições) de $H(x)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) A transformada de Fourier de $\delta(x)$ é

$$\mathscr{F}[\delta(x)] = \widehat{\delta}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-\mathrm{i}kx}\, dx = \frac{1}{2\pi}.$$

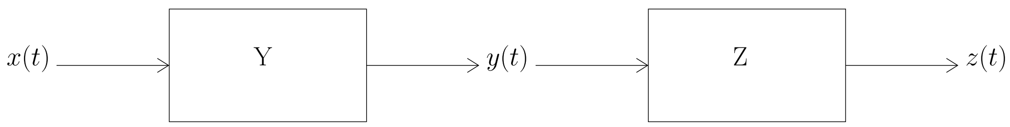
b) Mas

$$\mathscr{F}[\delta(x)] = \mathrm{i}k\widehat{H}(k) \Rightarrow$$
$$\widehat{H}(k) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}k} \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada II
P05, 21 Out 2005
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ______________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e LEMBRE-SE: COMECE PELAS MAIS FÁCEIS PARA VOCÊ. PROCURE RESOLVER O MAIOR NÚMERO DE ITENS POSSÍVEL, PARA MAXIMIZAR SUA NOTA. MANTENHA-SE CALMA(O), E PENSE UM POUCO EM QUAL SERÁ A SUA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS. Resolva as questões de forma *LIMPA E ORGANIZADA*, *nos espaços designados*. Boa prova.



1 [5,0] A figura acima mostra a modelagem de um sistema como um conjunto de duas “caixas” idênticas em seqüência. A seqüência de operações da figura corresponde ao sistema de equações diferenciais

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{T} = \frac{x}{T},\ y(0) = 0, \qquad \frac{dz}{dt} + \frac{z}{T} = \frac{y}{T},\ z(0) = 0.$$

Sabendo que a resposta de cada uma das caixas é produzida pelas convoluções

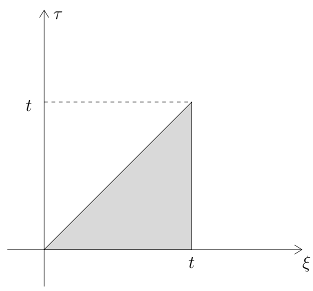
$$y(\xi) = \int_{\tau=0}^{\xi} e^{-\frac{\xi-\tau}{T}} \frac{x(\tau)}{T}\, d\tau, \qquad z(t) = \int_{\xi=0}^{t} e^{-\frac{t-\xi}{T}} \frac{y(\xi)}{T}\, d\xi,$$

substitua a expressão para $y(\xi)$ da primeira integral na segunda, obtenha uma integral dupla sobre a região hachuriada do plano ξ, τ mostrada na figura abaixo, **troque a ordem de integração entre ξ e τ com o auxílio da figura**, e **prove** o resultado

$$z(t) = \int_{\tau=0}^{t} G(t,\tau)\frac{x(\tau)}{T}\, d\tau,$$

$$G(t,\tau) = \frac{(t-\tau)e^{-\frac{t-\tau}{T}}}{T},$$

de forma que $G(t,\tau)$ pode ser interpretado como a função de Green do sistema formado pelas duas caixas.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
z(t) &= \int_{\xi=0}^{t} \frac{e^{-\frac{t-\xi}{T}}}{T} \int_{\tau=0}^{\xi} \frac{e^{-\frac{\xi-\tau}{T}}}{T} x(\tau)\, d\tau\, d\xi \\
&= \int_{\tau=0}^{t} \int_{\xi=\tau}^{t} \frac{e^{-\frac{(t-\xi)+(\xi-\tau)}{T}}}{T} \frac{x(\tau)}{T}\, d\xi\, d\tau \\
&= \int_{\tau=0}^{t} \frac{e^{-\frac{t-\tau}{T}}}{T} \frac{x(\tau)}{T} \left[\int_{\xi=\tau}^{t} d\xi\right] d\tau \\
&= \int_{\tau=0}^{t} \frac{(t-\tau)e^{-\frac{t-\tau}{T}}}{T} \frac{x(\tau)}{T}\, d\tau \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [5,0] Considere o problema que vimos em sala,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \qquad h(x,0) = H, \qquad h(0,t) = H_0 \le H, \qquad \frac{\partial h(L,t)}{\partial x} = 0.$$

Suponha que em vez de fazer $h(x,t) = H_0 + \eta(x,t)$, e forçar a condição de contorno homogênea $\eta(0,t) = 0$, você tente diretamente uma solução por separação de variáveis: $h(x,t) = X(x)T(t)$. A imposição da condição de contorno em $x = 0$ produzirá $h(0,t) = H_0 = X(0)T(t)$. Como é possível que uma constante seja igual a $T(t)$? (A não ser que ...) Ao mesmo tempo, a separação de variáveis leva a

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{\alpha^2 T}\frac{dT}{dt} = \lambda.$$

Discuta o sinal de λ integrando inicialmente em T (e não em X, como fizemos em sala de aula). Mostre que $\lambda > 0$ é fisicamente impossível. Agora, entretanto, $\lambda = 0$ tem um papel importante na solução: qual? Mostre que o resultado desta discussão dos sinais de λ e da condiçao de contorno não-homogênea acaba dando no mesmo que $h(x,t) = H_0 + \eta(x,t)$. Explique como você encaminharia o restante da solução, **sem resolvê-la**. **Seja sucinta(o) e clara(o): faça o mínimo de matemática para responder a esta questão**.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO: A condição

$$h(0,t) = H_0 = X(0)T(t)$$

requer que $T(t) =$ constante. A integração da equação diferencial ordinária resultante do método de separação de variáveis produz

$$T(t) = T_0 e^{\lambda\alpha^2 t};$$

se $\lambda > 0$, $\lim_{t\to\infty} T(t) = \infty$, o que é fisicamente inaceitável. Portanto, devemos ter $\lambda \le 0$. Acontece que $\lambda = 0$ é justamente o que precisamos para a condição de contorno, pois neste caso ficamos com $T(t) = T_0$, e $X(0) = H_0/T_0$. Sem perda de generalidade, faça $T_0 = 1$. Então, para $\lambda = 0$ a solução para $X(x)$ é

$$X(x) = c_1 + c_2 x \Rightarrow c_2 = 0,\ c_1 = H_0$$

(para atender às condições de contorno). Note que $h(x,t) = H_0$ atende à equação diferencial e atende às condições de contorno, mas não atende à condição inicial. Isto pode ser consertado propondo

$$h(x,t) = H_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(t)T_n(t)$$

onde os $T_n(t)$'s correspondem agora apenas aos valores negativos de λ; além disso, para que esta solução seja compatível com as condições de contorno do problema original, devemos ter

$$X_n(0) = 0, \qquad \frac{dX_n}{dx}(L) = 0,$$

e isto nos traz de volta ao problema resolvido em sala de aula ∎

Continue a solução no verso ⟹

TT010 Matemática Aplicada II
P06, 11 Nov 2005
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e LEMBRE-SE: COMECE PELAS MAIS FÁCEIS PARA VOCÊ. PROCURE RESOLVER O MAIOR NÚMERO DE ITENS POSSÍVEL, PARA MAXIMIZAR SUA NOTA. MANTENHA-SE CALMA(O), E PENSE UM POUCO EM QUAL SERÁ A SUA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS. Resolva as questões de forma *LIMPA E ORGANIZADA*, *nos espaços designados*. Boa prova.

1 [5,0] Resolva **parcialmente** a equação da difusão-advecção

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} = a^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

sujeita apenas à condição inicial de um lançamento instantâneo de massa M:

$$C(x,0) = M\delta(x),$$

onde $\delta(x)$ é a distribuição Delta de Dirac:

a) [3,0] Calcule a transformada de Fourier da equação diferencial parcial, **usando obrigatoriamente a definição**

$$\widehat{C}(k,t) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(x,t)\exp(-ikx)\,dx,$$

e obtendo uma equação diferencial ordinária de $\widehat{C}$ em t.

b) [2,0] Faça a transformada de Fourier de $C(x,0)$, e obtenha $\widehat{C}(k,0)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a) A transformada de Fourier da equação diferencial é

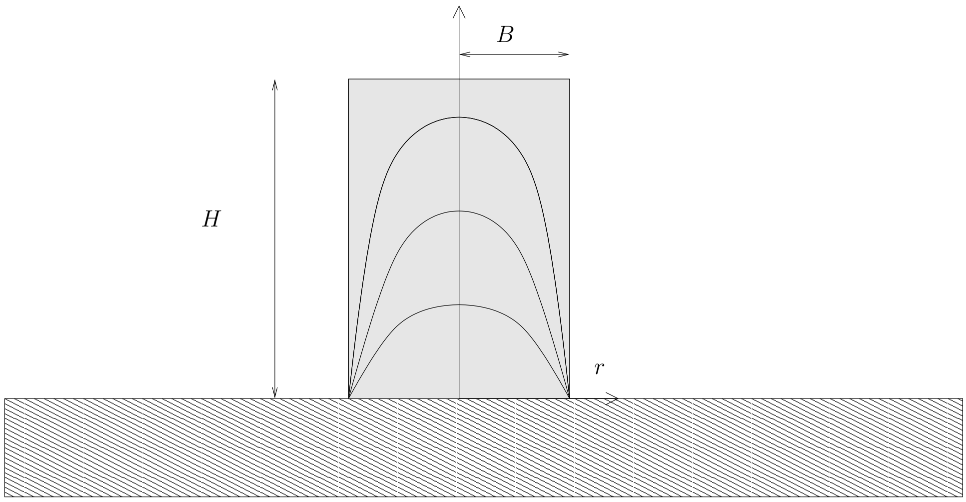
$$\frac{d\widehat{C}}{dt} + iku\widehat{C} = -a^2k^2\widehat{C}$$
$$\frac{d\widehat{C}}{dt} + \left(iku + a^2k^2\right)\widehat{C} = 0 \ \blacksquare$$

Note que, de acordo com o enunciado, não era necessário fazer mais nada neste item.

b) A transformada de Fourier da condição inicial é

$$\widehat{C}(k,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} M\delta(x)e^{-ikx}\,dx$$
$$= \frac{M}{2\pi} \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹



2 [5,0] Um **cilindro (=simetria radial!)** de solo no laboratório de solos está inicialmente totalmente encharcado; quando o cilindro é deixado vazar, a superfície freática dentro do cilindro obedece à equação e condições iniciais e de contorno (veja as dimensões na figura acima):

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{a^2}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial h}{\partial r}\right)\\
h(r,0) &= H,\\
h(B,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Obtenha a forma geral da solução por separação de variáveis,

$$
h(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n R_n(r) T_n(t)
$$

onde os $R_n(r)$'s são as autofunções do problema de Sturm-Liouville. Encontre $R_n(r)$ e $T_n(t)$, **mas não se preocupe em calcular os coeficientes A_n, bastando deixá-los indicados em função de integrais envolvendo as autofunções.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Como sempre, comece com uma tentativa de sepração de variáveis,

$$
h(r,t) = R(r)T(t);
$$

A substituição na equação diferencial parcial produz

$$
\begin{aligned}
R\frac{dT}{dt} &= \frac{a^2}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dRT}{dr}\right)\\
\frac{1}{a^2T}\frac{dT}{dt} &= \frac{a^2}{rR}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = -\lambda.
\end{aligned}
$$

O sinal de menos é totalmente arbitrário; a solução em T é

$$
T(t) = T_0 e^{-\lambda a^2 t};
$$

para que a solução não exploda quando t cresce, devemos ter $\lambda \geq 0$. Isto é tudo que a solução em T nos fornece. Quando $\lambda = 0$, a solução da equação diferencial resultante em R será:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dr}r\frac{dR}{dr} &= 0\\
r\frac{dR}{dr} &= K_1\\
dR &= K_1\frac{dr}{r}\\
R &= K_1 \ln r + K_2.
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Isto não é satisfatório, porque a solução apresenta uma singularidade logaritmica não-física na origem. Portanto, $\lambda = 0$ não nos serve, e ficamos com $\lambda > 0$. Neste último caso, ficamos com

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \lambda r R = 0 \\
\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \lambda R = 0,
\end{aligned}
$$

que se parece com, mas não é totalmente igual a, a equação diferencial de Bessel de ordem 0:

$$
\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0.
$$

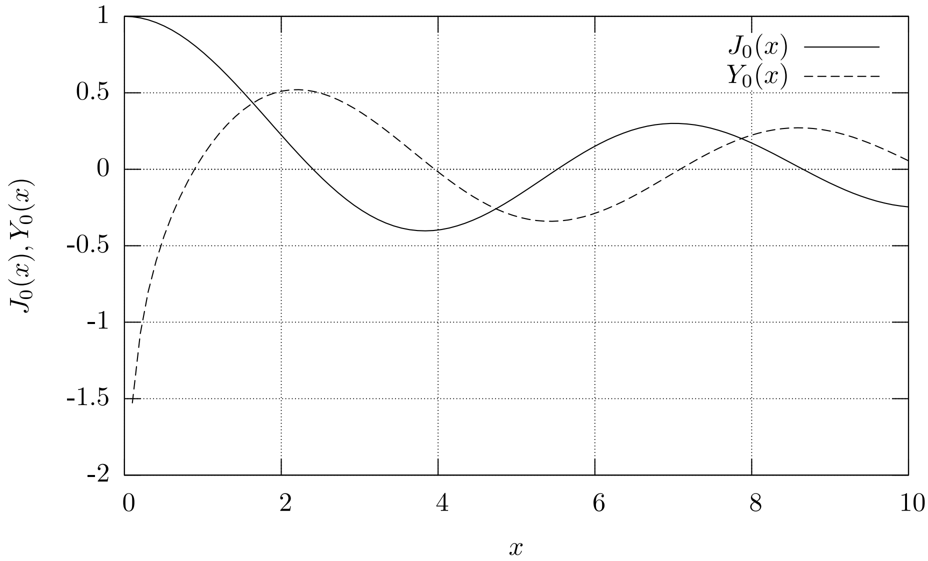
A solução, como em sala de aula, é fazer $\lambda = k^2 > 0$, e reescrever a equação diferencial na forma canônica de uma equação de Bessel,

$$
\frac{d^2R}{d(kr)^2} + \frac{1}{(kr)}\frac{dR}{d(kr)} + R = 0.
$$

A solução geral é

$$
R(r) = AJ_0(kr) + BY_0(kr);
$$

novamente, nós rejeitamos a solução em Y_0 porque ela envolve uma singularidade logaritimica na origem, como mostra a figura abaixo



Agora uso a condição de contorno

$$
h(B,t) = 0 \Rightarrow R(B)T(t) = 0 \Rightarrow J_0(k_nB) = 0;
$$

isto gera o conjunto de autovalores k_n, $n \geq 1$, do problema. A solução geral será do tipo

$$
h(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k_n^2 a^2 t} J_0(k_n r).
$$

No problema de Sturm-Liouville,

$$
\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + k^2 rR = 0, \qquad \frac{dR(0)}{dr} = 0, \qquad R(B) = 0,
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

a função peso é $w(r) = r$. Portanto, para obter os coeficientes de Fourier A_n, use a condição inicial $h(r,0) = H$ e faça

$$\int_0^B rh(r,0)J_0(k_m r)\,dr = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^B rJ_0(k_n r)J_0(k_m r)\,dr$$

$$\int_0^B rHJ_0(k_m r)\,dr = A_m \int_0^B rJ_0^2(k_m r)\,dr$$

$$A_m = \frac{\int_0^B HrJ_0(k_m r)\,dr}{\int_0^B rJ_0^2(k_m r)\,dr} \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada II
P07, 30 Nov 2005
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ______________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e LEMBRE-SE: COMECE PELAS MAIS FÁCEIS PARA VOCÊ. PROCURE RESOLVER O MAIOR NÚMERO DE ITENS POSSÍVEL, PARA MAXIMIZAR SUA NOTA. MANTENHA-SE CALMA(O), E PENSE UM POUCO EM QUAL SERÁ A SUA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS. Resolva as questões de forma *LIMPA E ORGANIZADA*, *nos espaços designados*. Boa prova.

---

1 [5,0] Resolva usando **obrigatoriamente** o método de separação de variáveis:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

com condições inicial e de contorno ($H(x)$ é a função de Heaviside)

$$c(x,0) = 2c_0 H(x - L/2); \qquad \frac{\partial c(0,t)}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial c(L,t)}{\partial x} = 0.$$

(Note que havia um erro de tipografia na definição da função de Heaviside $H(x - L/2)$; este fato foi levado em consideração na correção, e os alunos que se enganaram devido ao erro de tipografia não foram penalizados por isto)

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Faça $c(x,t) = X(t)T(t)$; substitua na equação diferencial parcial e obtenha

$$\begin{aligned} XT' &= a^2 X''T \\ \frac{T'}{a^2 T} &= \frac{X''}{X} = \lambda \end{aligned}$$

A solução da EDO em t é

$$T = T_0 \exp(\lambda a^2 t)$$

e para que ela não cresça exponencialmente, devemos ter $\lambda \le 0$. Vamos agora discutir os sinais remanescentes de λ em função das condições de contorno.
Se $\lambda = 0$,

$$X(x) = c_1 x + c_2; \qquad \frac{dX}{dx} = c_1 \Rightarrow c_1 = 0; \qquad X(x) = c_2.$$

Se $\lambda = -k^2 < 0$,

$$\begin{aligned} X'' + k^2 X &= 0 \\ X(x) &= A\cos(kx) + B\,\mathrm{sen}(kx) \\ X'(x) &= -Ak\,\mathrm{sen}(kx) + Bk\cos(kx) \\ X'(0) &= 0 \Rightarrow B = 0 \\ X'(L) &= 0 \Rightarrow -Ak\,\mathrm{sen}(kL) = 0 \end{aligned}$$

Na última equação acima, nós *não* queremos que $A = 0$, porque isto tornaria a solução trivial; em vez disto, fazemos

$$\mathrm{sen}(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow k_n = \frac{\pi n}{L};\ n = 1, 2, \ldots,$$

e com isto nós encontramos os autovalores do problema. Devemos buscar uma solução do tipo

$$c(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{a\pi n}{L}\right)^2 t\right] A_n \cos\frac{\pi n x}{L}.$$

Continue a solução no verso ⟹

Note que, sem perda de generalidade, fizemos $T_0 = 1$, ou seja: nós o "incorporamos" à constante A_n. Para obter os A_n's, fazemos

$$c(x,0) = 2c_0 H(x - L/2) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{\pi n x}{L},$$

$$2c_0 H(x - L/2)\cos\frac{\pi m x}{L} = \frac{A_0}{2}\cos\frac{\pi m x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{\pi m x}{L}\cos\frac{\pi n x}{L},$$

$$2c_0 \int_0^L H(x - L/2)\cos\frac{\pi m x}{L}\,dx = A_0 \int_0^L \frac{1}{2}\cos\frac{\pi m x}{L}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^L \cos\frac{\pi m x}{L}\cos\frac{\pi n x}{L}\,dx.$$

As integrais do lado direito são nulas quando $m \neq n$; quando $m = n$, elas valem $L/2$. Portanto, quando $m = 0$:

$$\frac{L}{2}A_0 = 2c_0 \int_0^L H(x - L/2)\,dx = 2c_0\frac{L}{2} = c_0 L \Rightarrow \frac{A_0}{2} = c_0,$$

e quando $m > 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{L}{2}A_m &= 2c_0 \int_0^L H(x - L/2)\cos\frac{\pi m x}{L}\,dx \\
&= 2c_0 \int_{L/2}^L \cos\frac{\pi m x}{L}\,dx \\
&= -\frac{2c_0 L}{\pi m}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi m}{2} \Rightarrow \\
A_m &= -\frac{4c_0}{\pi m}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi m}{2}.
\end{aligned}$$

A ameixa no pudim é observar que a expressão acima é nula para m par, e que para m ímpar o seno se alterna entre -1 e $+1$. Trocando de m para $2l - 1$, ficamos com a solução do problema:

$$c(x,t) = c_0 \left\{ 1 + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{4}{\pi(2l-1)} \exp\left[-\left(\frac{a\pi(2l-1)}{L} \right)^2 t \right] \cos\frac{\pi(2l-1)x}{L} \right\} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

TT010 Matemática Aplicada II
F, 9 Dez 2005
Prof. Nelson Luís Dias

100

NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e LEMBRE-SE: COMECE PELAS MAIS FÁCEIS PARA VOCÊ. PROCURE RESOLVER O MAIOR NÚMERO DE ITENS POSSÍVEL, PARA MAXIMIZAR SUA NOTA. MANTENHA-SE CALMA(O), E PENSE UM POUCO EM QUAL SERÁ A SUA ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS. Resolva as questões de forma *LIMPA E ORGANIZADA*, *nos espaços designados*. Boa prova.

---

1 [2,0] Se X é uma variável aleatória com função distribuição acumulada (FDA)

$$F_X(x) = \frac{x^2}{a^2+x^2}, \qquad a > 0, \qquad x \geq 0,$$

e sabendo que

$$\int_0^\infty \frac{2a^2x^2}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi a}{2},$$

calcule $\langle X \rangle$. **É OBRIGATÓRIO MOSTRAR CUIDADOSAMENTE TODOS OS PASSOS DA SOLUÇÃO**.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{dF_X}{dx} = \frac{2a^2x}{(x^2+a^2)^2};\\
\langle X \rangle &= \int_0^\infty x f_X(x)\,dx\\
&= \int_0^\infty \frac{2a^2x^2}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi a}{2} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [2,5] Se $f(x) = 1,\ 0 < x \le 1$, obtenha a série de Fourier da extensão ímpar de $f(x)$ no intervalo $-1 \le x \le 1$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A extensão ímpar é

$$f_I(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \le 1, \\ -1, & -1 \le x < 0. \end{cases}$$

No intervalo $[-1, 1]$, com comprimento $L = 2$, uma base para as funções ímpares é formada pelo conjunto

$$\left\{ \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{L} \right\}, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Segue-se o de sempre:

$$\begin{aligned}
f_I(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} n\pi x, \\
f_I(x) \operatorname{sen} m\pi x &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} n\pi x \operatorname{sen} m\pi x, \\
\int_{-1}^{1} f_I(x) \operatorname{sen} m\pi x \, dx &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_{-1}^{1} \operatorname{sen} n\pi x \operatorname{sen} m\pi x \, dx \\
2 \int_{0}^{1} \operatorname{sen} m\pi x \, dx &= B_m \int_{-1}^{1} [\operatorname{sen} m\pi x]^2 \, dx \\
\frac{2}{\pi m} [1 - (-1)^m] &= B_m \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [2,5] De acordo com M. Greenberg, *Advanced Engineering Mathematics*, p. 887, um problema de Sturm-Liouville é constituído da equação diferencial ordinária

$$[p(x)y']' + q(x)y + \lambda w(x)y = 0,$$

e de condições de contorno homogêneas do tipo

$$\begin{aligned} \alpha y(a) + \beta y'(a) &= 0, \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) &= 0. \end{aligned}$$

Se

$$y'' + \lambda y = 0 \ (0 < x < L), \qquad y(0) = 0, \ y(L) = 0,$$

[1,0] identifique $p(x)$, $q(x)$, $w(x)$, α, β, γ e δ. [1,5] Obtenha os autovalores λ_n e as autofunções $y_n(x)$ do problema. **Note que, para fazer isto, é preciso discutir os sinais de λ.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Por inspeção, $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, $w(x) = 1$; $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$ e $\delta = 0$. A equação característica é $r^2 + \lambda = 0$. Se:

a) $\lambda < 0 \ \Rightarrow$

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 \cosh \sqrt{|\lambda|}x + C_2 \operatorname{senh} \sqrt{|\lambda|}x \\ y(0) = 0 &\Rightarrow C_1 = 0; \\ y(L) = 0 &\Rightarrow C_2 = 0; \end{aligned}$$

(portanto, este caso não interessa).

b) $\lambda = 0 \ \Rightarrow$

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 + C_2 x \\ y(0) = 0 &\Rightarrow C_1 = 0; \\ y(L) = 0 &\Rightarrow C_2 = 0; \end{aligned}$$

(este caso também não interessa).

c) $\lambda > 0 \ \Rightarrow$

$$\begin{aligned} & y(x) = A \cos \sqrt{\lambda}x + B \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}x \\ & y(0) = 0 \Rightarrow A = 0; \\ & y(L) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}L = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}L = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \end{aligned}$$

(estes são os autovalores). As autofunções são

$$y_n = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [3,0] Uma partícula sai da posição $X(0) = x_0$ **com certeza absoluta** (ou seja: seu ponto de partida é determinístico). O seu movimento evolui de acordo com a equação diferencial estocástica

$$\frac{dX}{dt} + \gamma X = Z(t),$$

onde $\gamma > 0$ e $Z(t)$ é uma variável aleatória que em cada instante possui média zero: $\langle Z(t)\rangle = 0$. [1,5] Obtenha $X(t)$ resolvendo a equação diferencial ordinária normalmente. A resposta deve ficar em função de x_0 e de uma integral envolvendo $Z(t)$. [1,5] Mostre que $\langle X(t)\rangle = x_0 e^{-\gamma t}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Esta é uma equação diferencial de ordem 1, linear e não-homogênea. Existem muitas formas de resolvê-la. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
X &= uv \\
\frac{duv}{dt} + \gamma uv &= Z(t) \\
u\frac{dv}{dt} + v\frac{du}{dt} + \gamma uv &= Z(t) \\
u\left[\frac{dv}{dt} + \gamma v\right] + v\frac{du}{dt} &= Z(t)
\end{aligned}$$

Agora imponha que o termo entre colchetes seja nulo (invoque o espírito de Euler, e resolva de cabeça):

$$v = v_0 e^{-\gamma t}.$$

Substituindo no restante da equação,

$$\begin{aligned}
\frac{du}{d\tau} &= \frac{1}{v_0} e^{\gamma\tau} Z(\tau) \\
u(t) &= u_0 + \frac{1}{v_0}\int_0^t e^{\gamma\tau} Z(\tau)\, d\tau \\
X(t) &= u(t)v(t) = u_0 v_0 e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t}\int_0^t e^{\gamma\tau} Z(\tau)\, d\tau \\
X(t) &= x_0 e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t}\int_0^t e^{\gamma\tau} Z(\tau)\, d\tau \\
\langle X(t)\rangle &= \left\langle x_0 e^{-\gamma t}\right\rangle + \left\langle e^{-\gamma t}\int_0^t e^{\gamma\tau} Z(\tau)\, d\tau \right\rangle \\
\langle X(t)\rangle &= x_0 e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t}\int_0^t e^{\gamma\tau} \langle Z(\tau)\rangle\, d\tau \\
\langle X(t)\rangle &= x_0 e^{-\gamma t} \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹