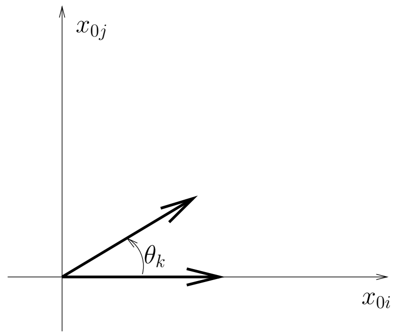
TT009 Matemática Aplicada I
P01, 11 Mar 2005
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

Não se esqueça da notação de vetores:

1. com uma seta sobre a letra: $\vec{\imath}$ ou $\vec{a}$ (esta é a forma mais comum entre os físicos) ou
2. com um til *sob* a letra: $\underset{\sim}{i}$, ou $\underset{\sim}{a}$ (esta é a forma mais popular entre os engenheiros, e é a minha preferida),

e garanta seus pontos nas questões ✝



1 [5,0] Define-se a rotação no plano x_{0i}, x_{0j} de valor θ_k como a rotação em que um vetor paralelo a x_{0i} gira de θ_k (neste plano) de tal modo que $\epsilon_{ijk} = +1$ (veja a figura). Note que $\epsilon_{ijk} = +1$ define o *sentido* da rotação.

(a) [3,0] Mostre que a matriz de rotação no plano x_{0i}, x_{0j} é

$$[\boldsymbol{Q}_k] = \begin{bmatrix} \cos\theta_k & -\operatorname{sen}\theta_k \\ \operatorname{sen}\theta_k & \cos\theta_k \end{bmatrix}$$

(b) [2,0] Conseqüentemente, mostre que as 3 matrizes tri-dimensionais de rotação plana são

$$[\boldsymbol{R}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 \\ 0 & \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}$$

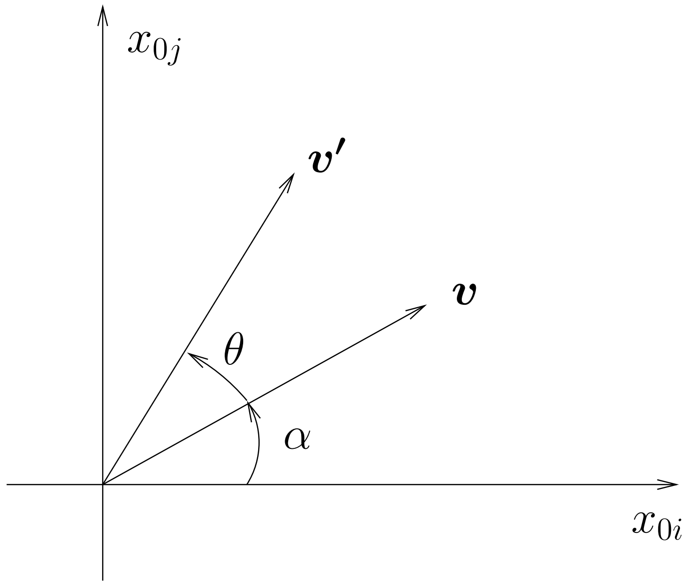
$$[\boldsymbol{R}_2] = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & 0 & \operatorname{sen}\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{R}_3] = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\operatorname{sen}\theta_3 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que $[\boldsymbol{R}_2]$ é “diferente” das outras duas: em que, e por que? Sugestão: lembre-se da ordem i, j, k em $\epsilon_{ijk} = +1$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹



a) Seja $\boldsymbol{v}$ um vetor genérico de módulo r, fazendo um ângulo α com o eixo x_{0i}; então, após uma rotação de θ_k as coordenadas do vetor rotacionado serão

$$\begin{aligned} v'_i &= r\cos(\alpha+\theta_k) \\ &= r\cos\alpha\cos\theta_k - r\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta_k \\ &= v_i\cos\theta_k - v_j\,\mathrm{sen}\,\theta_k. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} v'_j &= r\,\mathrm{sen}(\alpha+\theta_k) \\ &= r\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\theta_k + r\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta_k \\ &= v_j\cos\theta_k + v_i\,\mathrm{sen}\,\theta_k \end{aligned}$$

ou:

$$\begin{bmatrix} v'_i \\ v'_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_k & -\mathrm{sen}\,\theta_k \\ \mathrm{sen}\,\theta_k & \cos\theta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \end{bmatrix} \;\blacksquare$$

b) A matriz $[\boldsymbol{R}_k]$ pode ser obtida a partir da matriz $[\boldsymbol{Q}_k]$ expandindo esta última pela adição de uma linha k e uma coluna k com 1 na posição (k,k) e 0 nas demais. *Respeitada* a ordem de i,j,k em $\epsilon_{i,j,k}=+1$ temos:

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{Q}_1] &= \begin{bmatrix} R_{1,22} & R_{1,23} \\ R_{1,32} & R_{1,33} \end{bmatrix} \\ [\boldsymbol{Q}_2] &= \begin{bmatrix} R_{2,33} & R_{2,31} \\ R_{2,13} & R_{2,11} \end{bmatrix} \\ [\boldsymbol{Q}_3] &= \begin{bmatrix} R_{3,11} & R_{3,12} \\ R_{3,21} & R_{3,22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Note que $[\boldsymbol{Q}_2]$ está "transposta", ou seja: o índice 3 aparece antes do índice 1. É por isto que $[\boldsymbol{R}_2]$ é "diferente" das outras duas, já que o sinal de $\mathrm{sen}\,\theta_2$ aparece trocado $\blacksquare$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [5,0] Calcule a derivada de $u = xy^2 - 3z^3$ no ponto $(1, -2, 4)$ na direção normal à superfície $xy + xz + yz = -6$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A derivada direcional é dada por

$$\frac{du}{ds} = \nabla u \cdot \boldsymbol{s_0},$$

portanto precisamos calcular o gradiente de u no ponto e também o vetor unitário $\boldsymbol{s_0}$ que dá a direção de variação de u. Comecemos pelo segundo: o vetor normal à superfície $F(x, y, z) = 0$ é ∇F; portanto, se

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= xy + xz + yz + 6, \\ \nabla F &= (y + z)\boldsymbol{i} + (x + z)\boldsymbol{j} + (x + y)\boldsymbol{k} \\ &= (-2 + 4)\boldsymbol{i} + (1 + 4)\boldsymbol{j} + (1 - 2)\boldsymbol{k} \\ &= 2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 1\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

O vetor normal *unitário* é

$$\boldsymbol{s}_0 = \frac{1}{\sqrt{30}}(2, 5, -1).$$

O gradiente de u no mesmo ponto é

$$\begin{aligned} \nabla u &= y^2\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j} - 9z^2\boldsymbol{k} \\ &= 4\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 144\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{\sqrt{30}}(2, 5, -1) \cdot (4, -4, -144) = \frac{132}{\sqrt{30}} \approx 24{,}0997 \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
P02, 23 Mar 2005
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

Não se esqueça da notação de vetores:

1. com uma seta sobre a letra: $\vec{\imath}$ ou $\vec{a}$ (esta é a forma mais comum entre os físicos) ou
2. com um til *sob* a letra: $\underset{\sim}{i}$, ou $\underset{\sim}{a}$ (esta é a forma mais popular entre os engenheiros, e é a minha preferida),

e garanta seus pontos nas questões ☨

1 [3,0] Uma rotação no espaço leva a base canônica (e obviamente ortonormal) $\mathbb{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ em uma nova base *também ortonormal* $\mathbb{F} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\}$. As coordenadas de $\boldsymbol{f}_1$ e $\boldsymbol{f}_2$ em $\mathbb{E}$ são

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),$$
$$\boldsymbol{f}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}).$$

(a) [1,0] Obtenha $\boldsymbol{f}_3$.

(b) [2,0] Obtenha a matriz de rotação $[\boldsymbol{C}]$ de $\mathbb{E}$ para $\mathbb{F}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Como a base $\mathbb{F}$ é ortonormal, $\boldsymbol{f}_3$ deve ser normal ao plano definido por $\boldsymbol{f}_1$ e $\boldsymbol{f}_2$, e ter tamanho unitário; além disso, sendo a transformação uma rotação, e sendo $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ orientados nesta ordem segundo um triedro positivo, então o mesmo deve acontecer com os vetores da base $\mathbb{F}$. Basta portanto fazer

$$\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{f}_1 \times \boldsymbol{f}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,-1).$$

Para a matriz $[\boldsymbol{C}]$, aplique a fórmula $C_{i,j} = (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{f}_j)$.

$$C_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$C_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}},$$
$$C_{1,3} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$C_{2,1} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$C_{2,2} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$
$$C_{2,3} = 0,$$
$$C_{3,1} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$C_{3,2} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}},$$
$$C_{3,3} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [3,0] Calcule a área da superfície do parabolóide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ que se projeta sobre a região $\sqrt{x^2+y^2} \leq 1$ do plano Oxy.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Se $z = f(x,y)$, então a fórmula para o cálculo da área da superfície não-plana (em geral) é

$$S = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dydx.$$

Portanto, $R_{x,y} = \left\{(x,y) : \sqrt{x^2+y^2 \leq 1}\right\}$ e

$$\begin{aligned} S &= \iint_{R_{x,y}} \sqrt{1+(2x)^2+(-2y)^2}\, dydx, \\ &= \iint_{R_{x,y}} \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\, dydx, \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \sqrt{1+4r^2}\, r dr d\theta, \\ &= \frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi \ \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [4,0] As vazões que entram e saem de um tanque de uma estação de tratamento de esgotos são controladas automaticamente, em função do volume de esgoto $V(t)$ dentro do tanque, de acordo com

$$E(t) = \frac{V^3(t)}{V_R^2 T} \qquad \text{(vazão de entrada)},$$

$$S(t) = \frac{V(t)}{T} \qquad \text{(vazão de saída)},$$

onde T é uma constante de tempo característica do problema, e V_R é um volume característico do problema (por exemplo, V_R pode ser o volume do tanque).

a) [1,0] Quais são as dimensões de $E(t)$ e $S(t)$? Elas são fisicamente consistentes?

b) [3,0] Sabendo que um balanço simples de massa, do tipo "taxa de variação do volume = vazão de entrada − vazão de saída" é

$$\frac{dV}{dt} = E(t) - S(t),$$

e que $V(t=0) = V_0 = V_R/2$, resolva a equação diferencial e obtenha o volume do tanque em função do tempo, $V(t)$. O volume aumentará ou diminuirá com o tempo?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

As dimensões são de (volume/tempo), ou seja: vazão. Elas são consistentes com a equação da continuidade. Para resolver a equação diferencial, substitua $E(t)$ e $S(t)$ na equação da continuidade, e obtenha

$$\frac{dV}{dt} = \frac{V^3}{V_R^2 T} - \frac{V}{T},$$

$$\frac{dV}{dt} + \frac{V}{T} = \frac{V^3}{V_R^2 T}$$

Esta é uma equação de Bernoulli; fazendo $z = V^{-2}$ e substituindo, obtém-se

$$T\frac{dz}{dt} - 2z = -2V_R^{-2}.$$

Esta é uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem, *linear* e não-homogênea. Uma solução particular é *muito fácil* de encontrar:

$$z_p = V_R^{-2}.$$

A equação homogênea associada é

$$\frac{dz_h}{dt} - \frac{2}{T} z_h = 0,$$

cuja solução é

$$z_h = z_0 e^{\frac{2t}{T}}.$$

Portanto, a solução geral da equação de Bernoulli é

$$V(t) = \left[V_R^{-2} + z_0 e^{2t/T}\right]^{-1/2}.$$

A condição inicial é

$$V(0) = \frac{V_R}{2} = \left[V_R^{-2} + z_0\right]^{-1/2};$$

obtendo-se, finalmente,

$$V(t) = V_R\left[1 + 3e^{2t/T}\right]^{-1/2} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

TT009 Matemática Aplicada I
P03, 15 Abr 2005
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

Não se esqueça da notação de vetores:

1. com uma seta sobre a letra: $\vec{\imath}$ ou $\vec{a}$ (esta é a forma mais comum entre os físicos) ou
2. com um til *sob* a letra: $\underset{\sim}{i}$, ou $\underset{\sim}{a}$ (esta é a forma mais popular entre os engenheiros, e é a minha preferida),

e garanta seus pontos nas questões ☨

1 [3,0] Você deseja calcular a integral indefinida

$$\int \frac{x}{1+x}\,dx = x + 1 - \ln(x+1).$$

Para isto, prove (seguindo a sugestão), os seguintes fatos auxiliares:

a) [0,5] (integração por partes)

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x.$$

b) [0,5] (substituição $y = 1 + x$ no resultado anterior)

$$\int \ln(1+x)\,dx = (1+x)\ln(1+x) - (1+x).$$

c) [0,5] (aplicação direta da regra de derivada do produto)

$$\frac{d}{dx}x\ln(x+1) = \frac{x}{x+1} + \ln(x+1).$$

d) [1,5] Finalmente, junte todos os fatos acima **de forma ordenada** para obter o resultado desejado.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Nesta solução, por simplicidade eu vou supor que o argumento de $\ln(\cdot)$ é sempre positivo, para que não seja necessário escrever $\ln|x|$, etc.. A maneira mais fácil (mas que não era pedida na prova) é

$$\begin{aligned} u &= x + 1,\\ x &= u - 1,\\ du &= dx. \end{aligned}$$

$$\int \frac{x}{x+1}\,dx = \int \frac{u-1}{u}\,du = \int \left(1 - \frac{1}{u}\right)du = u - \ln u = (x+1) - \ln(x+1).$$

Para fazer como era pedido na prova,

$$\begin{aligned} u = \ln x \;&\Rightarrow\; du = \frac{dx}{x},\\ dv = dx \;&\Rightarrow\; v = x, \end{aligned}$$

$$\int \ln x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - x.$$

Continue a solução no verso ⟹

Então,

$$\int \ln u \, du = u \ln u - u;$$

substituindo $u = (x+1)$,

$$\int \ln(x+1)\, dx = \int \ln(x+1)\, d(x+1) = (x+1)\ln(x+1) - (x+1).$$

O ítem c) é óbvio; então,

$$\int \left[\frac{x}{x+1} + \ln(x+1) \right] dx = x \ln(x+1),$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x+1}\, dx &= x\ln(x+1) - \int \ln(x+1)\, dx \\ &= x\ln(x+1) - [(x+1)\ln(x+1) - (x+1)] \\ &= (x+1) - \ln(x+1) \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

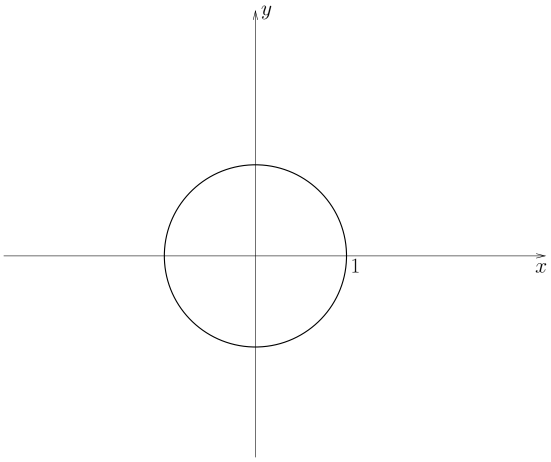
2 [3,0] Utilizando o resultado da questão anterior, resolva

$$(1+t)\frac{dx}{dt} + (1+2t)x = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO: Esta é uma equação separável:

$$\begin{aligned}
(1+t)\frac{dx}{dt} &= -(1+2t)x,\\
\frac{dx}{x} &= -\frac{1+2t}{1+t}\,dt\\
\int \frac{dx}{x} &= -\left[\int \frac{dt}{1+t} + 2\int \frac{t}{1+t}\,dt\right]\\
\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\xi} &= -\left[\int_0^t \frac{d\tau}{1+\tau} + 2\int_0^t \frac{\tau}{1+\tau}\,d\tau\right]\\
\ln\frac{x}{x_0} &= -\left[\ln(1+\tau) + 2\big((1+\tau) - \ln(1+\tau)\big)\right]_0^t\\
&= -\left[\ln(1+t) + 2t - 2\ln(1+t)\right]\\
&= -\left(2t - \ln(1+t)\right) \Rightarrow\\
x &= x_0(1+t)e^{-2t} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$



3 [4,0]

a) [2,5] **Usando, obrigatoriamente, a transformação** $z = e^{i\theta}$ **e coordenadas polares**, calcule a integral

$$\oint_C \frac{dz}{z^2},$$

onde C é o círculo unitário da figura ao lado.

b) [1,5] A série de Laurent de $f(z) = z^{-2}$ é particularmente simples. Use-a, e também o teorema dos resíduos, para explicar o resultado que você encontrou no item (a).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$z = e^{i\theta},$$
$$dz = ie^{i\theta}\, d\theta.$$

$$\oint_C \frac{dz}{z^2} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}}{e^{2i\theta}}\, d\theta = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta}(id\theta) = -e^{-i\theta}\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

De fato, a série de Laurent de $f(z) = z^{-2}$ é, simplesmente,

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{0}{z} + 0 + 0z + 0z^2 + \dots,$$

de forma que o c_{-1} desta série é 0, e, pelo Teorema dos Resíduos,

$$\oint_C \frac{dz}{z^2} = 2\pi i c_{-1} = 0 \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
P04, 06 Mai 2005
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

Não se esqueça da notação de vetores:

1. com uma seta sobre a letra: $\vec{\imath}$ ou $\vec{a}$ (esta é a forma mais comum entre os físicos) ou
2. com um til *sob* a letra: $\underset{\sim}{i}$, ou $\underset{\sim}{a}$ (esta é a forma mais popular entre os engenheiros, e é a minha preferida),

e garanta seus pontos nas questões †

1 QUESTÃO ANULADA E SEUS PONTOS FORAM TRANSFERIDOS PARA A QUESTÃO **2**.
2 [5,0] Encontre a solução **geral** da equação diferencial

$$\frac{1}{x}y' + y = 0$$

em termos de **funções elementares**, separando as variáveis. **Verifique que a solução é uma função par.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} &= -y \\
\frac{dy}{y} &= -x\,dx \\
\int \frac{dy}{y} &= -\int x\,dx \\
\ln|y| &= -\frac{x^2}{2} + K \\
|y| &= e^K e^{-\frac{x^2}{2}} \\
y &= \pm e^K e^{-\frac{x^2}{2}} = Ce^{-\frac{x^2}{2}}.
\end{aligned}$$

$$y(-x) = Ce^{-\frac{(-x)^2}{2}} = Ce^{-\frac{x^2}{2}} = y(x) \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [5,0] Resolva a equação diferencial

$$\frac{1}{x}y' + y = 0$$

pelo método de Frobenius, ou seja:

a) [3,0] Encontre uma solução **geral** em série do tipo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}.$$

b) [1,0] **É obrigatório encontrar a lei de formação dos coeficientes a_n da série.**

c) [1,0] **Mostre, obrigatoriamente, que a solução em série é equivalente à solução em termos de funções elementares que você encontrou na questão 2.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n},$$
$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{(r+n-1)}.$$

Substituindo na equação diferencial:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{(r+n-2)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} = 0;$$

faça $r + n = r + m - 2$ no segundo somatório acima:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{(r+n-2)} + \sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} x^{r+m-2} = 0,$$
$$r a_0 x^{r-2} + (r+1) a_1 x^{r-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(r+n) a_n + a_{n-2}\right] x^{r+n-2} = 0$$

A equação indicial é

$$a_0 \neq 0 \Rightarrow r = 0 \;\text{ e }\; a_1 = 0$$

e a relação de recorrência é

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n}.$$

Note que a partir de a_0 calcula-se $a_2, a_4, a_6, \ldots$, e que $0 = a_1 = a_3 = a_5 = \ldots$. Reescrevendo a solução em termos de expoentes pares,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n},$$
$$b_n = -\frac{b_{n-1}}{2n}.$$

Agora para descobrir a lei de formação, faço:

$$b_n = (-1) \times (-1) \times (-1) \times \ldots \times \frac{1}{2 \times 2 \times 2 \ldots} \times \frac{1}{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots}$$

ou seja:

$$b_n = \frac{(-1)^n}{2^n \, n!}.$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

e

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\, n!} x^{2n}.$$

É fácil agora provar que esta série é equivalente à função $y(x) = e^{-x^2/2}$. Comece com a série de Taylor de e^u, e faça a substituição $u = -x^2/2$:

$$\begin{aligned} e^u &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \\ e^{-\frac{x^2}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{2}\right)^n \times \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n\, n!} \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
P05, 20 Mai 2005
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

---

1 [3,0] Dada a equação diferencial de Legendre,

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0:$$

a) [0,5] Classifque o ponto $x = 0$. **Justifique.**

b) [2,5] Obtenha a solução **geral** em série em torno de $x = 0$, $y(x) = AP(x) + BQ(x)$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são duas séries linearmente independentes do tipo

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^{2n+1} \qquad (p_0 = 1),$$
$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^{2n} \qquad (q_0 = 1),$$

e A e B são constantes arbitrárias. **É obrigatório encontrar a forma geral (em função de n) dos coeficientes p_n e q_n.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

O ponto $x = 0$ é *ordinário*, e portanto é possível obter uma solução em série

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

não havendo necessidade de adicionar r ao expoente, nem de encontrar uma equação indicial. Isto posto,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$
$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$
$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2},$$

donde

$$(1-x^2)y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^n,$$
$$-2xy' = \sum_{n=0}^{\infty} (-2n) a_n x^n,$$
$$2y = \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^n.$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Mude o expoente dos 3 últimos somatórios de n para $m-2$, e reúna na equação diferencial todos os somatórios:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)na_n x^{n-2} + \sum_{m=2}^{\infty}\left[-(m-3)(m-2) - 2(m-2) + 2\right] a_{m-2}x^{m-2} = 0.$$

Isolando $n=0$ e $n=1$, expandindo e simplificando o termo entre colchetes, e trocando de volta de m para n:

$$\sum_{n=0}^{1}(n-1)na_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n-1)na_n - (n-3)na_{n-2}\right] x^{n-2} = 0.$$

O primeiro somatório é identicamente nulo independentemente dos valores de a_0 e a_1; já pensando em $p_0 = q_0 = 1$ do enunciado, faça $a_0 = 1$ e $a_1 = 1$. A relação de recorrência é

$$a_n = \frac{n-3}{n-1}a_{n-2}.$$

Obtenha agora $a_3 = a_5 = a_7 = \ldots 0$ e $a_2 = -1, a_4 = -1/3, a_6 = -1/5, a_8 = -1/7$, etc.. Portanto, para $n > 0$:

$$\begin{aligned} p_n &= 0, \\ q_n &= -1/(2n-1) \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [3,0] **Sem utilizar frações parciais,** encontre a transformada de Laplace inversa

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Uso o teorema da convolução,

$$\mathscr{L}[f*g] = \overline{f}(s)\overline{g}(s) \Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\overline{f}(s)\overline{g}(s)\right\} = \int_{\tau=0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau.$$

Mas

$$\overline{f}(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow f(t) = 1, \;\; \overline{g}(s) = \frac{1}{s^2+4} \Rightarrow g(t) = \frac{\operatorname{sen} 2t}{2},$$

donde

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\} = \int_{\tau=0}^{t} \frac{\operatorname{sen} 2(t-\tau)}{2}\,d\tau = \frac{1-\cos 2t}{4} \;\blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [4,0] **Usando, obrigatoriamente, transformada de Laplace**, resolva o problema de valor inicial

$$x'' + 4x' + 3x = e^{-3t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Fórmulas (*que talvez sejam ...*) úteis:

$$\mathscr{L}\{x'(t)\} = s\mathscr{L}\{x\} - x(0) \qquad \mathscr{L}\{x''(t)\} = s^2\mathscr{L}\{x\} - sx(0) - x'(0)$$

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \qquad \Gamma(x) = (x-1)!$$

$$\mathscr{L}\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a} \qquad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^b}\right\} = \frac{t^{b-1}e^{at}}{\Gamma(b)} \quad (b > 0)$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Tomando a transformada de Laplace da equação diferencial e introduzindo as condições iniciais,

$$\begin{aligned}
s^2\overline{x} + 4s\overline{x} + 3\overline{x} &= \frac{1}{s+3}, \\
\overline{x}(s^2 + 4s + 3) &= \frac{1}{s+3}, \\
\overline{x}(s+3)(s+1) &= \frac{1}{s+3}, \\
\overline{x}(s) &= \frac{1}{(s+3)^2(s+1)} = \frac{A}{(s+3)^2} + \frac{B}{(s+3)} + \frac{C}{s+1} \\
&= \frac{1}{4(s+1)} - \frac{1}{4(s+3)} - \frac{1}{2(s+3)^2}.
\end{aligned}$$

A pequena tabela de transformadas de Laplace fornecida no enunciado produz, imediatamente,

$$x(t) = \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t} - \frac{1}{2}te^{-3t} \;\blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
P06, 10 Jun 2005
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ______________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

---

1 [10,0] Uma forma particularmente fácil de resolver equações diferenciais ordinárias lineares de ordem 1 não-homogêneas do tipo

$$y' + a(x)y = f(x)$$

é pelo método de variação de constantes: se $h(x)$ é a solução da equação homogênea associada, tente

$$y = g(x)h(x) \Rightarrow g'h + gh' + agh = f$$

$$g\underbrace{(h' + ah)}_{=0} + g'h = f \Rightarrow g(x) = \int \frac{f}{h}\,dx \;\blacksquare$$

Usando, obrigatoriamente, o método descrito acima, encontre a solução de

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{T}x = \delta(t), \qquad x(0) = 0,$$

onde $\delta(t)$ é a distribuição delta de Dirac. Observações:

1. Ache a solução h *sem se preocupar em atender à condição inicial.*
2. Na integração de f/h, use como limite inferior $t = 0_-$, de maneira a permitir que a delta de Dirac "atue" em torno de zero.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Inicialmente, procura-se uma solução da equação homogênea (qualquer uma serve):

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt} + \frac{1}{T}h &= 0,\\ \frac{dh}{h} &= -\frac{dt}{T},\\ \ln h &= -\frac{t}{T},\\ h(t) &= e^{-t/T}.\end{aligned}$$

Agora procuro uma solução da forma

$$x(t) = h(t)g(t),$$

tal que

$$0 = x(0_-) = h(0_-)g(0_-) \Rightarrow g(0_-) = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned}g(t) &= \int_{0_-}^{t} e^{+\tau/T}\delta(\tau)\,d\tau\\ &= \int_{-\infty}^{t} e^{+\tau/T}\delta(\tau)\,d\tau\\ &= H(t)e^{0/T} = H(t),\end{aligned}$$

donde

$$x(t) = H(t)e^{-t/T} \;\blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
P07, 24 Jun 2005
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

---

1 [3,0] Uma bola de sinuca de massa m está parada sobre a mesa em $t = 0_-$ e na posição $x = 0$; ela recebe um impulso I de um taco em $t = 0$. Deixando de lado uma análise mais detalhada da dinâmica de rotação da bola, e supondo que a equação do movimento do centro de massa da bola ao longo da direção x em que foi imprimido o impulso seja

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = I\delta(t),$$

(onde $delta(t)$ é a distribuição delta de Dirac), mostre que após a tacada a velocidade da bola é constante.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A velocidade inicial em $t = 0_-$ é zero:

$$\begin{aligned}\int_{\tau=0_-}^{t} m\frac{d^2x}{d\tau^2} &= I\int_{\tau=0_-}^{t} \delta(\tau)\,d\tau\\ m\frac{dx}{d\tau}(t) - m\frac{dx}{d\tau}(0_-) &= IH(t)\\ mv(t) &= IH(t) \Rightarrow v(t) = (I/m)H(t)\ \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [4,0] Encontre a solução geral do sistema de equações diferenciais acopladas

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

ATENÇÃO: ESTAS SÃO EQUAÇÕES DE ORDEM 2. SEU DESACOPLAMENTO NA BASE DOS AUTOVETORES PRODUZ 2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE ORDEM 2. A SOLUÇÃO GERAL DE CADA UMA DESTAS ENVOLVE DUAS CONSTANTES ARBITRÁRIAS. A SOLUÇÃO GERAL DO SISTEMA ENVOLVE 4 CONSTANTES ARBITRÁRIAS.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Escreva o vetor $\boldsymbol{u}$ na base dos autovetores da matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}:$$

$$\boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{2} u'_k \boldsymbol{e}'_k.$$

O sistema de equações diferenciais fica na forma

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2}\frac{d^2u'_k}{dt^2}\boldsymbol{e}'_k &= \boldsymbol{A}\cdot\sum_{k=1}^{2}u'_k\boldsymbol{e}'_k\\ &= \sum_{k=1}^{2}u'_k\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}'_k\\ &= \sum_{k=1}^{2}u'_k\lambda_{(k)}\boldsymbol{e}'_k,\end{aligned}$$

onde $\lambda_{(k)}$ é 0 k-ésimo autovalor. As equações agora estão desacopladas; basta resolver

$$\frac{d^2u'_k}{dt^2} - \lambda_{(k)}u'_k = 0$$

para cada k. No caso da matriz $\boldsymbol{A}$,

$$\lambda_1 = 3, \qquad \boldsymbol{e}'_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = -1, \qquad \boldsymbol{e}'_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$$

As soluções desacopladas são

$$\begin{aligned}u'_1 &= K_1e^{+\sqrt{3}t} + K_2e^{-\sqrt{3}t},\\ u'_2 &= K_3e^{+\mathrm{i}\,t} + K_4e^{-\mathrm{i}\,t}.\end{aligned}$$

A solução geral é

$$\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix} = \left(K_1e^{+\sqrt{3}t} + K_2e^{-\sqrt{3}t}\right)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \left(K_3e^{+\mathrm{i}\,t} + K_4e^{-\mathrm{i}\,t}\right)\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \blacksquare$$

Alternativamente, é também possível reduzir a ordem do sistema, porém ao custo de aumentar o tamanho da matriz. Em minha opinião, esta alternativa é mais complicada. Faça

$$\begin{aligned}v_1 &= u_1,\\ v_2 &= u_2,\\ v_3 &= \frac{du_1}{dt},\\ v_4 &= \frac{du_2}{dt}.\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Obtenha o sistema de ordem 1

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v1 \\ v2 \\ v3 \\ v4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cujos autovalores e autovetores são

$$\lambda_1 = -\mathrm{i}\,,\ \boldsymbol{e}'_1 = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ -\mathrm{i} \\ +\mathrm{i} \end{bmatrix},\ \lambda_2 = +\mathrm{i}\,,\ \boldsymbol{e}'_2 = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ +\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix},\ \lambda_3 = -\sqrt{3},\ \boldsymbol{e}'_3 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix},\ \lambda_4 = +\sqrt{3},\ \boldsymbol{e}'_4 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ +\sqrt{3} \\ +\sqrt{3} \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = C_1 e^{-\mathrm{i}\,t}\begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ -\mathrm{i} \\ +\mathrm{i} \end{bmatrix} + C_2 e^{+\mathrm{i}\,t}\begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ +\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix} + C_3 e^{-\sqrt{3}t}\begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix} + C_4 e^{+\sqrt{3}t}\begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ +\sqrt{3} \\ +\sqrt{3} \end{bmatrix} \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [3,0] Converta a equação diferencial ordinária

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

em um sistema de equações diferenciais ordinárias **de ordem 1**. Sugestão: faça $u = x$ e $v = dx/dt$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Se

$$\begin{aligned} u &= x, \\ v &= \frac{dx}{dt}, \end{aligned}$$

então

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
F, 6 Jul 2005
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ______________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. TODAS AS SUAS RESPOSTAS DEVEM TER JUSTIFICATIVA. Boa prova.

Não se esqueça da notação de vetores:

1. com uma seta sobre a letra: $\vec{\imath}$ ou $\vec{a}$ (esta é a forma mais comum entre os físicos) ou
2. com um til *sob* a letra: $\underset{\sim}{i}$, ou $\underset{\sim}{a}$ (esta é a forma mais popular entre os engenheiros, e é a minha preferida),

e garanta seus pontos nas questões †

1 [3,0] Dada a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x = 0,$$

a) [0,5] Classifique o ponto $x = 0$.

b) [2,0] Obtenha a solução geral **em série de potências** em torno de $x = 0$.

c) [0,5] Mostre que a solução em série que você encontrou é equivalente à solução em forma fechada $y = A\cos x + B\,\mathrm{sen}\,x$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) O ponto $x = 0$ é ordinário: a equação diferencial está na forma canônica $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, com $xp(x) = 0$ e $x^2q(x) = x^2$ analíticas em $x = 0$.
b)

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \\ 0 &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \end{aligned}$$

fazendo $m = n - 2$,

$$0 = \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} x^m + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

Continue a solução no verso ⟹

fazendo $n = m$,

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n\right] x^n.$$

A relação de recorrência é

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}.$$

Há duas constantes arbitrárias, a_0 e a_1. Fazendo ambas iguais a 1,

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1 & a_1 &= 1 \\
a_2 &= -\frac{1}{2\times 1} = \frac{1}{2!} & a_3 &= -\frac{1}{3\times 2} = \frac{1}{3!} \\
a_4 &= +\frac{1}{2}\frac{1}{4\times 3} = \frac{1}{4!} & a_5 &= +\frac{1}{3!}\frac{1}{5\times 4} = \frac{1}{5!} \\
a_6 &= -\frac{1}{4!}\frac{1}{6\times 5} = \frac{1}{6!} & a_7 &= -\frac{1}{5!}\frac{1}{7\times 8} = \frac{1}{7!} \\
&\ldots & &\ldots
\end{aligned}$$

A solução geral em forma de série, portanto, é

$$y = A\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right] + B\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right]$$

c) O primeiro colcheta acima é a série de Taylor de $\cos(x)$; o segundo é a série de Taylor de $\operatorname{sen}(x)$; portanto,

$$y = A\cos(x) + B\operatorname{sen}(x) \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [4,0] Resolva

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = \delta(t),\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1,$$

usando **obrigatoriamente** transformada de Laplace. Note que $\delta(t)$ é a distribuição delta de Dirac.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO: Por causa da Delta, uso como condição inicial $t = 0_-$. Vou precisar de

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{\frac{d^2x}{dt^2}\} &= s^2\overline{x} - sx(0_-) - x'(0_-),\\
\mathscr{L}\{\frac{dx}{dt}\} &= s\overline{x} - x(0_-),\\
\mathscr{L}\{\delta(t)\} &= 1.
\end{aligned}$$

Agora, aplicando as transformadas de Laplace acima à equação diferencial,

$$\begin{aligned}
s^2\overline{x} - 1 - 3s\overline{x} + 2\overline{x} &= 1,\\
\overline{x}\left[s^2 - 3s + 2\right] &= 2,\\
\overline{x}(s) &= \frac{2}{s^2 - 3s + 2} = \frac{2}{s-2} - \frac{2}{s-1}.
\end{aligned}$$

Invertendo,

$$x(t) = 2H(t)\left[e^{2t} - e^t\right] \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [3,0] Seja C o semi-círculo de raio R do plano complexo tal que a parte imaginária de z é maior que ou igual a zero: $\mathrm{Im} z \geq 0$; calcule

$$\lim_{R\to\infty} \int_C \frac{dz}{z}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Se

$$z = Re^{\mathrm{i}\,\theta}, \qquad dz = iRe^{\mathrm{i}\,\theta} d\theta,$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^\pi \frac{\mathrm{i}\,Re^{\mathrm{i}\,\theta}\,d\theta}{Re^{\mathrm{i}\,\theta}} = \mathrm{i}\,\pi \;\blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

TT009 Matemática Aplicada I
Q, 1 Jul 2005
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ______________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

Não se esqueça da notação de vetores:

1. com uma seta sobre a letra: $\vec{\imath}$ ou $\vec{a}$ (esta é a forma mais comum entre os físicos) ou
2. com um til *sob* a letra: $\underset{\sim}{i}$, ou $\underset{\sim}{a}$ (esta é a forma mais popular entre os engenheiros, e é a minha preferida),

e garanta seus pontos nas questões ☨

1 [2,5] Dada a transformação $\boldsymbol{A}$ cuja matriz na base canônica é

$$[\boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}:$$

a) [0,5] O que você pode afirmar **a priori** sobre seus autovalores e seus autovetores?

b) [1,0] Obtenha os 9 elementos da matriz de rotação $[\boldsymbol{C}]$ tais que

$$\boldsymbol{e}'_j = \sum_{i=1}^{3} C_{ij}\boldsymbol{e}_i,$$

onde $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ são os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$, e $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$ são os autovetores de $\boldsymbol{A}$.

c) [1,0] **Usando necessariamente a matriz de rotação** $[\boldsymbol{C}]$, mostre que a matriz de $\boldsymbol{A}$ na base dos autovetores é uma matriz diagonal formada pelos autovalores de $\boldsymbol{A}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) A matriz é simétrica, e portanto há 3 autovalores reais, e 3 autovetores mutuamente ortogonais.
b) Os autovalores e autovetores correspondentes são

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 3 & \boldsymbol{e}'_1 &= (0, 1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}) \\
\lambda_2 &= 3 - \sqrt{5} & \boldsymbol{e}'_2 &= (1/\sqrt{2}, -2\sqrt{5}/(5\sqrt{2}), -\sqrt{5}/(5\sqrt{2})) \\
\lambda_3 &= 3 + \sqrt{5} & \boldsymbol{e}'_3 &= (1/\sqrt{2}, +2\sqrt{5}/(5\sqrt{2}), +\sqrt{5}/(5\sqrt{2}))
\end{aligned}$$

Agora, as coordenadas dos autovetores $\boldsymbol{e}'_j$ na base canônica são as *colunas* da matriz de rotação $[\boldsymbol{C}]$:

$$[\boldsymbol{C}] = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{5} & -2\sqrt{5}/(5\sqrt{2}) & +2\sqrt{5}/(5\sqrt{2}) \\ -2/\sqrt{5} & -\sqrt{5}/(5\sqrt{2}) & +\sqrt{5}/(5\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

c) Finalmente, aplico

$$[\boldsymbol{A}]' = [\boldsymbol{C}]^T[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{C}] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 3+\sqrt{5} \end{bmatrix} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [2,5] Dada a equação diferencial

$$x^2y'' - xy' + y = 0 :$$

a) [1,0] Classifique o ponto $x = 0$.

b) [1,5] Encontre a solução geral da equação. **Observação: encontrar uma solução é relativamente fácil; uma segunda solução LI pode ser encontrada pelo método de variação das constantes**.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) Na sua forma canônica, a equação é

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$
$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$$

Então $x = 0$ é um ponto singular de $p(x)$ e de $q(x)$, e portanto $x = 0$ é um ponto *singular*. Além disto, $xp(x) = -1$ e $x^2q(x) = 1$ são *analíticas* em $x = 0$, e portanto este é um ponto *singular regular*.

Na verdade, embora seus coeficientes não sejam constantes, esta é uma equação de Euler, e portanto devemos ter pelo menos uma solução da forma $y = x^\lambda$; substituindo na equação diferencial,

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

donde $\lambda = 1$ é uma raiz *dupla*. Portanto, $y = x$ é uma das soluções LI procuradas, mas é preciso encontrar uma segunda. Tente o método de variação das constantes:

$$y = a(x)x,$$
$$y' = a'x + a,$$
$$y'' = a''x + 2a'.$$

A substituição na equação diferencial agora produz

$$xa'' + a' = 0.$$

Fazendo $p = a'$ reduzo a ordem da equação diferencial e obtenho

$$p = \frac{C}{x};$$

integrando novamente,

$$a = C \ln x + D$$

donde, finalmente,

$$y = (C \ln x + D)\, x$$

é a solução geral da equação.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [2,5] Resolva a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{T}x = \delta(t), \qquad x(0_-) = 0,$$

usando obrigatoriamente transformadas de Laplace. Por causa da presença da distribuição delta de Dirac, é conveniente definir

$$\mathscr{L}\{f(t)\} \equiv \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt.$$

Siga obrigatoriamente o seguinte roteiro:

a) [0,5] Monte a tabela de transformadas de que você necessitará, na ida ou na volta, calculando $\mathscr{L}\{e^{at}\}$ e $\mathscr{L}\{\delta(t)\}$.

b) [1,0] Mostre que

$$\mathscr{L}\{H(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}\mathscr{L}\{f(t)\}.$$

c) [1,0] De posse dos resultados de a) e de b), resolva o problema.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{e^{at}\} &= \int_{0_-}^{\infty} e^{-st}e^{at}\,dt = \frac{1}{s-a};\\ \mathscr{L}\{\delta(t)\} &= \int_{0_-}^{\infty} e^{-st}\delta(t)\,dt = 1.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_{0_-}^{\infty} H(t-a)f(t-a)e^{-st}\,dt &= \int_{0_-}^{\infty} H(t-a)f(t-a)e^{-s(t-a)}e^{-as}\,dt\\ &= e^{-as}\int_{0_-}^{\infty} H(t-a)f(t-a)e^{-s(t-a)}\,d(t-a)\\ &= e^{-as}\int_{a}^{\infty} f(t-a)e^{-s(t-a)}\,d(t-a)\\ &= e^{-as}\int_{\tau=0}^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau\\ &= e^{-as}\mathscr{L}\{f(t)\}.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}s\overline{x} - x(0_-) + \frac{1}{T}\overline{x} &= 1\\ \overline{x}\left(s + \frac{1}{T}\right) &= 1\\ \overline{x} &= \frac{1}{s - \frac{-1}{T}} = \mathscr{L}\{H(t)e^{-t/T}\} \Rightarrow\\ x(t) &= H(t)e^{-t/T}.\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [2,5] **Usando obrigatoriamente variáveis complexas, integração de contorno e o teorema dos resíduos, calcule**

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - \operatorname{sen}\theta}.$$

Sugestão: faça a transformação de variável $z = e^{\mathrm{i}\,\theta}$ e transforme a integral acima em uma integral sobre o círculo unitário no plano complexo envolvendo um pólo.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Fazendo a substituição sugerida, se $z = e^{\mathrm{i}\,\theta}$, quando θ vai de 0 a 2π, z percorre o círculo unitário C no plano complexo; então:

$$\begin{aligned} z &= e^{\mathrm{i}\,\theta}, \\ dz &= ie^{\mathrm{i}\,\theta}, \\ \frac{dz}{\mathrm{i}\,z} &= d\theta \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} z - \frac{1}{z} &= e^{\mathrm{i}\,\theta} - e^{-\mathrm{i}\,\theta} \\ &= 2\mathrm{i}\ \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \\ \operatorname{sen}\theta &= \frac{z^2 - 1}{2\mathrm{i}\,z}. \end{aligned}$$

Retornando à integral,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - \operatorname{sen}\theta} &= \oint_C \frac{1}{2 - \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}\,z}} \frac{dz}{\mathrm{i}\,z} \\ &= \oint_C \frac{-2dz}{z^2 - 4\mathrm{i}\,z - 1} \end{aligned}$$

O integrando possui dois pólos, $z_1 = (2 - \sqrt{3})\mathrm{i}$ e $z_2 = (2 + \sqrt{3})\mathrm{i}$, mas apenas z_1 está dentro do círculo unitário. Portanto,

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)\,dz &= 2\pi\mathrm{i}\,c_{-1} \\ &= 2\pi\mathrm{i} \lim_{z\to z_1} \left[(z - z_1) \frac{-2}{(z - z_1)(z - z_2)} \right] \\ &= 2\pi\mathrm{i} \frac{-2}{z - z_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$