TT010 Matemática Aplicada II
F, 15 Dez 2004
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ______________________

CHEGOU A PROVA FINAL. PROCURE TER UM BOM DESEMPENHO NELA. ESTA PROVA FOI PREPARADA PARA VERIFICAR O SEU CONHECIMENTO E TAMBÉM A SUA CAPACIDADE DE RESOLVER PROBLEMAS. CONCENTRE-SE, COMECE PELAS MAIS FÁCEIS, CONTROLE O TEMPO. RESOLVA AS QUESTÕES DE FORMA LIMPA E ORGANIZADA. MANTENHA-SE CALMA(O), E CONFIE NO QUE VOCÊ ESTUDOU. BOA SORTE.

---

1 [2,0] Um sociólogo estudou o estado de espírito das alunas e dos alunos de um curso de engenharia imediatamente antes dos exames finais. Ele dividiu os ânimos em cinco categorias, da mais negativa (à qual atribuiu nota 0) até a mais positiva (à qual atribuiu nota máxima). Depois ele tabulou o número de alunos em cada estado de espírito, conforme abaixo:

Estado de espírito	Nota	Número de alunos
“muito ruim”	0	4
“ruim”	1	3
“regular”	2	4
“bom”	3	7
“ótimo”	4	3

a) [0,4] Se você fosse um dos alunos amostrados, qual seria a sua nota?

b) [0,8] Calcule a média amostral da nota do estado de espírito.

c) [0,8] Calcule a variância amostral **não-tendenciosa** da nota do estado de espírito.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a) Na verdade, vale qualquer resposta. Por exemplo: “Estudei muito. Na verdade, gostei tanto do curso que só fiquei em final para ter o prazer de fazer mais uma prova! (Aliás, esta prova está muito boa). Nota 4.”

b) O vetor de observações é

$$\mathbf{x} = [0,0,0,0,1,1,1,2,2,2,2,3,3,3,3,3,3,3,4,4,4]^{\mathrm{T}},$$

e o tamanho da amostra é $n = 21$. A média amostral é

$$\frac{1}{21} \times (4 \times 0 + 3 \times 1 + 4 \times 2 + 7 \times 3 + 3 \times 4) = \frac{44}{21} \approx 2{,}09.$$

c) A variância amostral é

$$\frac{1}{\mathbf{20}} \times (4 \times (0 - 44/21)^2 + 3 \times (1 - 44/21)^2 + 4 \times (2 - 44/21)^2 + 7 \times (3 - 44/21)^2 + 4 \times (4 - 44/21)^2) = \frac{397}{210} \approx 1{,}89 \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [3,0] Um rio que era cristalino e feliz (condição inicial: $c(x,0) = 0$) é atacado em $x = 0$ por um despejo contínuo de Q $\mathrm{kg\,s^{-1}}$ de dejetos suínos. O dono dos porquinhos deseja saber qual é a concentração de dejetos (em $\mathrm{kg\,m^{-3}}$) em função da posição x ao longo do rio e do tempo t. Se $c(x,t)$ é a concentração, a equação diferencial que a modela é

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U\frac{\partial c}{\partial x} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \beta c + \frac{Q}{A}\delta(x),$$

onde U, D, β são constantes, A é a área constante da seção transversal do rio, e $\delta(x)$ é a distribuição delta de Dirac. Você é a/o engenheira/o ambiental encarregada/o de resolver o problema.

a) [0,3] Dimensionalmente, $[U] = \mathrm{LT^{-1}}$, $[D] = \mathrm{L^2T^{-1}}$ e $[\beta] = \mathrm{T^{-1}}$; o que significam U, D e β?

b) [1,5] Calcule a transformada de Fourier da equação acima (em relação a x), e obtenha uma equação diferencial **ordinária** em $\widehat{c}(k,t)$. Resolva esta equação.

c) [1,2] Finalmente, mostre que

$$c(x,t) = \frac{Q}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{-(Dk^2+\beta+ikU)t}}{Dk^2+\beta+ikU} e^{+ikx}\,dk.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a) U é a velocidade de advecção, D é um coeficiente de difusão ou dispersão, e β um coeficiente de decaimento.

b) Primeiramente, note que a transformada de Fourier de $\delta(x)$ é 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\delta(x)\,dx = e^{-ik0} = 1.$$

Em seguida, a condição inicial tem transformada óbvia:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}c(x,0), dx = \widehat{c}(k,0) = 0.$$

A transformada de Fourier da equação diferencial parcial em relação a x é

$$\frac{d\widehat{c}}{dt} + Uik\widehat{c} = Di^2k^2\widehat{c} - \beta\widehat{c} + \frac{Q}{A},$$

que pode ser reescrita na forma de uma equação diferencial linear não-homogênea de primeira ordem

$$\frac{d\widehat{c}}{dt} + (Uik + Dk^2 + \beta)\widehat{c} = \frac{Q}{A},$$
$$\widehat{c}(k,0) = 0.$$

Existem muitas formas de resolver esta equação; talvez uma das mais simples seja "ver" que

$$\widehat{c}(k,t) = \frac{1}{(Uik + Dk^2 + \beta)}\frac{Q}{A} + f(k,t),$$
$$\frac{d\widehat{c}}{dt} = \frac{df}{dt},$$
$$\frac{df}{dt} + (Uik + Dk^2 + \beta)f = 0.$$

Esta última é uma equação homogênea, facílima de resolver:

$$f(k,t) = \frac{-1}{(Uik + Dk^2 + \beta)}\frac{Q}{A}e^{-(Uik+Dk^2+\beta)t},$$

donde

$$\widehat{c}(k,t) = \frac{Q}{A}\frac{1 - e^{-(Uik+Dk^2+\beta)t}}{(Uik + Dk^2 + \beta)}.$$

c) Basta aplicar a fórmula da inversa!

$$c(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{+\infty}\widehat{c}(k,t)e^{+ikx}\,dk = \frac{Q}{2\pi A}\int_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1 - e^{-(Uik+Dk^2+\beta)t}}{(Uik + Dk^2 + \beta)}e^{+ikx}\,dk \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [5,0] Esta questão a/o guiará para a solução da equação diferencial parcial

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \phi_0\frac{x}{L^3}, \quad 0 \le x \le L$$

Com condições de contorno e iniciais dadas por

$$\begin{aligned} \phi(0,t) = \phi(L,t) &= 0, \\ \phi(x,0) &= 0, \\ \frac{\partial\phi(x,0)}{\partial t} &= 0, \end{aligned}$$

com o método de separação de variáveis

a) [0,5] Um ataque direto do tipo $\phi(x,t) = X(x)T(t)$ é **infrutífero**. Tente, e mostre por que ele não funciona.

b) [1,0] Já o ataque $\phi(x,t) = X(x)T(t) + f(x)$ funciona! Tente, e mostre que

$$f(x) = -\frac{\phi_0}{6}\left(\frac{x}{L}\right)^3 + c_1 x + c_2.$$

c) [1,0] Com $f(x)$ acima, substitua $\phi(x,t) = X(x)T(t) + f(x)$ nas condições de contorno; **mostre** que $c_1 = \phi_0/(6L)$ e $c_2 = 0$ produzem $X(0) = X(L) = 0$.

d) [1,0] **Retorne** à equação que você conseguiu separar; ela é

$$\frac{1}{c^2}\frac{1}{T(t)}\frac{d^2T}{dt^2} = \frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2} = \lambda.$$

Resolva a equação para $X(x)$; utilizando as condições homogêneas $X(0) = X(L) = 0$, **discuta** o sinal de λ e **encontre** os autovalores λ_n que **não** produzem soluções triviais.

e) [1,5] Continue, e resolva a questão até o fim, isto é: ache $\phi(x,t)$. Você **deve** deixar os coeficientes de Fourier da solução indicados pelas respectivas integrais.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a) Se $\phi(x,t) = X(x)T(t)$, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \phi_0\frac{x}{L^3} \Rightarrow \\ \frac{1}{c^2}\frac{d^2T}{dt^2}X(t) &= \frac{d^2X}{dx^2}T(t) + \phi_0\frac{x}{L^3}. \end{aligned}$$

Aqui, o truque de dividir ambos os lados por $X(x)T(t)$ não funciona; veja:

$$\frac{1}{c^2T(t)}\frac{d^2T}{dt^2} = \frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2} + \phi_0\frac{x}{X(x)T(t)L^3}.$$

Enquanto que o lado esquerdo é função só de t, o segundo termo do lado direito é função tanto de x quanto de t, e esta abordagem não funciona ∎

b) Se $\phi(x,t) = X(x)T(t) + f(x)$, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \phi_0\frac{x}{L^3} \Rightarrow \\ \frac{1}{c^2}\frac{d^2T}{dt^2}X(t) &= \frac{d^2X}{dx^2}T(t) + \left[\frac{d^2f}{dx^2} + \phi_0\frac{x}{L^3}\right]. \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Para que a separação de variáveis funcione, basta agora exigir que o termo entre colchetes do lado direito seja zero:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \phi_0 \frac{x}{L^3} = 0 \;\Rightarrow\; f(x) = -\frac{\phi_0}{6}\left(\frac{x}{L}\right)^3 + c_1 x + c_2 \;\blacksquare$$

c) Substitua agora as condições de contorno:

$$\begin{aligned} \phi(0,t) = \phi(L,t) = 0 \;&\Rightarrow \\ X(0)T(t) + f(0) &= 0, \\ X(L)T(t) + f(L) &= 0. \end{aligned}$$

Agora, **imponha** $f(0) = f(L) = 0$; neste caso, para que as condições de contorno sejam atendidas em qualquer t, necessariamente $X(0) = X(L) = 0$. Mas então,

$$\begin{aligned} f(0) = 0 \;&\Rightarrow\; c_2 = 0, \\ f(L) = 0 \;&\Rightarrow\; -\frac{\phi_0}{6} + c_1 L = 0 \;\Rightarrow\; c_1 = +\frac{\phi_0}{6L} \;\blacksquare \end{aligned}$$

d) Se $\lambda = 0$,

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = 0 \;\Rightarrow\; X(x) = k_1 x + k_2 \text{ e } X(0) = X(L) = 0 \;\Rightarrow\; k_1 = k_2 = 0.$$

Portanto, $\lambda = 0$ não serve. Se $\lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda X &= 0, \\ r^2 &= \lambda, \\ r &= \pm\sqrt{\lambda}. \end{aligned}$$

Para $\lambda > 0$,

$$X(x) = k_3 \cosh(\sqrt{\lambda} x) + k_4 \operatorname{senh}(\sqrt{\lambda} x).$$

Mas $X(0) = 0 \;\Rightarrow\; k_3 = 0$ e $X(L) = 0 \;\Rightarrow\; k_4 \operatorname{senh}(\sqrt{\lambda} L) = 0 \;\Rightarrow\; k_4 = 0$; novamente, $\lambda > 0$ não serve. Finalmente, se $\lambda < 0$, então

$$X(x) = k_5 \cos(\sqrt{-\lambda} x) + k_6 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda} x).$$

Para $X(0) = 0$, encontro $k_5 = 0$; para $X(L) = 0$ encontro

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda} L) &= 0, \\ \sqrt{-\lambda} L &= n\pi, \\ \lambda_n &= -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \; n = 1, 2, 3, \ldots \;\blacksquare \end{aligned}$$

e) Neste ponto, a equação ordinária em T é

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 T(t) = 0,$$

Com solução

$$\begin{aligned} T_n(t) &= A_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right), \\ \frac{dT_n}{dt} &= \frac{n\pi c}{L}\left[-A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right]. \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade,

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

e a solução geral será do tipo

Continue a solução no verso ⟹

$$\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(\frac{n\pi ct}{L}) + B_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi ct}{L}) \right] \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L}) + \frac{\phi_0}{6} \left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right].$$

As condições iniciais agora impõem:

$$\phi(x,0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L}) + \frac{\phi_0}{6} \left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right],$$
$$\frac{\partial \phi(x,0)}{\partial t} = 0 = \frac{n\pi c}{L} B_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L}).$$

Os coeficientes de Fourier vêm do procedimento clássico: obviamente, $B_n = 0$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L}) = -\frac{\phi_0}{6} \left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right],$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L}) \operatorname{sen}(\frac{m\pi x}{L}) = -\frac{\phi_0}{6} \left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right] \operatorname{sen}(\frac{m\pi x}{L}),$$
$$\int_{x=0}^{L} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L}) \operatorname{sen}(\frac{m\pi x}{L})\, dx = -\int_{x=0}^{L} \frac{\phi_0}{6} \left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right] \operatorname{sen}(\frac{m\pi x}{L})\, dx;$$

as autofunções são ortogonais (afinal de contas, X_n é solução de um problema de Sturm-Liouville), e somente termo $n = m$ da soma sobrevive, a partir do qual se pode obter A_m, e concluir a solução:

$$A_m \int_{x=0}^{L} \operatorname{sen}(\frac{m\pi x}{L})^2\, dx = -\int_{x=0}^{L} \frac{\phi_0}{6} \left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right] \operatorname{sen}(\frac{m\pi x}{L})\, dx \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
P01, 13 Ago 2004
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

Não se esqueça da notação de vetores:

1. com uma seta sobre a letra: $\vec{\imath}$ ou $\vec{a}$ (esta é a forma mais comum entre os físicos) ou
2. com um til *sob* a letra: $\underset{\sim}{i}$, ou $\underset{\sim}{a}$ (esta é a forma mais popular entre os engenheiros, e é a minha preferida),

e garanta seus pontos nas questões †

1 [5,0] Para a distribuição gama, cuja função densidade de probabilidade (FDP) é

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\beta x^{\beta-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\beta)}$$

com

$$\begin{aligned}
\Gamma(\beta) &= \int_0^\infty t^{\beta-1} e^{-t}\, dt,\\
\mu &= \int_0^\infty x f_X(x)\, dx,\\
\sigma^2 &= \int_0^\infty (x-\mu)^2 f_X(x)\, dx,
\end{aligned}$$

mostre que:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f_X(x)\, dx = 1,\\
\lambda = \frac{\mu}{\sigma^2},\\
\beta = \frac{\mu^2}{\sigma^2}.
\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\int_{x=0}^\infty \frac{\lambda^\beta x^{\beta-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\beta)}\, dx &= \int_{x=0}^\infty \frac{(\lambda x)^{\beta-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\beta)}\, d(\lambda x)\\
(t = \lambda x \Rightarrow) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t=0}^\infty t^{\beta-1} e^{-t}\, dt\\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta)}\\
&= 1 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

$$
\begin{aligned}
\mu &= \int_0^\infty x f_X(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_{x=0}^\infty \lambda^\beta x^\beta e^{-\lambda x}\,dx \\
&= \frac{1}{\lambda\Gamma(\beta)}\int_{x=0}^\infty (\lambda x)^\beta e^{-\lambda x}\,d(\lambda x) \\
&= \frac{1}{\lambda\Gamma(\beta)}\int_{t=0}^\infty t^{(\beta+1)-1} e^{-t}\,dt \\
&= \frac{1}{\lambda\Gamma(\beta)}\Gamma(\beta+1) \\
&= \frac{\beta\Gamma(\beta)}{\lambda\Gamma(\beta)} \\
&= \frac{\beta}{\lambda} \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \int_0^\infty (x-\mu)^2 f_X(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty (x-\beta/\lambda)^2 \lambda^\beta x^{\beta-1} e^{-\lambda x}\,dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty (x^2 - 2x\beta/\lambda + \beta^2/\lambda^2)\lambda^\beta x^{\beta-1} e^{-\lambda x}\,dx \\
&= \int_0^\infty \frac{x^2\lambda^\beta x^{\beta-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(\beta)}\,dx - \frac{2\beta}{\lambda}\int_0^\infty \frac{x\lambda^\beta x^{\beta-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(\beta)}\,dx + \frac{\beta^2}{\lambda^2}\int_0^\infty \frac{\lambda^\beta x^{\beta-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(\beta)}\,dx.
\end{aligned}
$$

A segunda e terceira integrais acima já foram calculadas e valem, respectivamente, $\mu = \beta/\lambda$ e 1. A primeira integral é

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^2\lambda^\beta x^{\beta-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(\beta)}\,dx &= \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^{(\beta+2)-1}e^{-\lambda x}\,d(\lambda x)}{\lambda^2\Gamma(\beta)} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+2)}{\lambda^2\Gamma(\beta)} \\
&= \frac{(\beta+1)\Gamma(\beta+1)}{\lambda^2\Gamma(\beta)} \\
&= \frac{\beta(\beta+1)\Gamma(\beta)}{\lambda^2\Gamma(\beta)} \\
&= \frac{\beta(\beta+1)}{\lambda^2}
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{\beta^2}{\lambda^2} + \frac{\beta}{\lambda^2} - 2\frac{\beta^2}{\lambda^2} + \frac{\beta^2}{\lambda^2} \\
&= \frac{\beta}{\lambda^2} \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\left.\begin{aligned}
\mu &= \frac{\beta}{\lambda} \\
\sigma^2 &= \frac{\beta}{\lambda^2}
\end{aligned}\right.
\quad\Rightarrow\quad
\begin{aligned}
\beta &= \frac{\mu^2}{\sigma^2}, \\
\lambda &= \frac{\mu}{\sigma^2} \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [5,0] Se X é uma variável aleatória com densidade de probabilidade uniforme entre -1 e 1,

$$x \in [-1,1]; \;\; f_X(x) = \frac{1}{2},$$

e Y é a variável aleatória resultante da transformação

$$y = x^3,$$

obtenha a faixa de variação de Y e a função densidade de probabilidade $f_Y(y)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Como $y = x^3$ é uma relação biunívoca e portanto inversível, com

$$x = y^{1/3}, \;\; \frac{dx}{dy} = \frac{1}{3}y^{-2/3}, \;\; Y \in [-1,1],$$

vale:

$$\begin{aligned} f_Y(y)dy &= f_X(x)dx \\ f_Y(y) &= f_X(x)\frac{dx}{dy} \\ f_Y(y) &= \frac{1}{2}\frac{1}{3}y^{-2/3}, \\ &= \frac{1}{6y^{2/3}} \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
P02, 27 Ago 2004
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

Não se esqueça da notação de vetores:

1. com uma seta sobre a letra: $\vec{\imath}$ ou $\vec{a}$ (esta é a forma mais comum entre os físicos) ou
2. com um til *sob* a letra: $\underset{\sim}{i}$, ou $\underset{\sim}{a}$ (esta é a forma mais popular entre os engenheiros, e é a minha preferida),

e garanta seus pontos nas questões †

1 [5,0] Se a variável aleatória Y depende de duas variáveis aleatórias X e W **independentes entre si**, e ambas com variância σ^2, de acordo com o modelo linear

$$Y = 3X + W,$$

Calcule o coeficiente de correlação entre X e Y.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Como X e W são independentes,

$$\mathrm{Var}\{Y\} = \mathrm{Var}\{3X + W\} = \mathrm{Var}\{3X\} + \mathrm{Var}\{W\} = 9\sigma^2 + \sigma^2 = 10\sigma^2.$$

A Covariância entre X e Y é

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\{X,Y\} &= \langle (X - \langle X\rangle)(3X + W - \langle 3X + W\rangle)\rangle \\
&= \langle (X - \langle X\rangle)(3(X - \langle X\rangle) + (W - \langle W\rangle))\rangle \\
&= \left\langle 3(X - \langle X\rangle)^2 + (X - \langle X\rangle)(W - \langle W\rangle)\right\rangle \\
&= 3\left\langle (X - \langle X\rangle)^2\right\rangle + \langle (X - \langle X\rangle)(W - \langle W\rangle)\rangle \\
&= 3\sigma^2 + 0.
\end{aligned}$$

O coeficiente de correlação é

$$r_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}\{X,Y\}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{3\sigma^2}{\sigma \times \sqrt{10}\sigma} = \frac{3}{\sqrt{10}} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [5,0] Ajuste uma reta de mínimos quadrados

$$\widehat{y}(x) = ax + b$$

(isto é: calcule a e b) à função

$$\begin{aligned} f : [-1, 1] &\to \mathbb{R} \\ x \mapsto y &= f(x) = x + x^3 \end{aligned}$$

e calcule o seu coeficiente de correlação (atenção: o domínio de integração é dado pelo domínio da função).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Faça

$$w(x) = y(x) - \widehat{y}(x)$$

e escreva o erro médio quadrático

$$\begin{aligned} E(a, b) &= \int_{-1}^{+1} w^2(x)\, dx \\ &= \int_{-1}^{+1} [x + x^3 - (ax + b)]^2\, dx \\ &= \frac{2\left(105\, b^2 + 35\, a^2 - 112\, a + 92\right)}{105}. \end{aligned}$$

A condição necessária de mínimo é

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a} &= 0 \ \Rightarrow \ \frac{2(70a - 112)}{105} = 0 \ \Rightarrow \ a = \frac{8}{5}, \\ \frac{\partial E}{\partial b} &= 0 \ \Rightarrow \ 4b = 0 \ \Rightarrow \ b = 0 \ \blacksquare \end{aligned}$$

A média de y é igual à de $\widehat{y}$;

$$\overline{y} = \int_{-1}^{+1} (x + x^3)\, dx = 0.$$

As variâncias e o erro médio quadrático são:

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \int_{-1}^{+1} (x + x^3)^2\, dx = \frac{92}{105}, \\ \sigma_{\widehat{y}}^2 &= \int_{-1}^{+1} (8x/5)^2\, dx = \frac{64}{75}, \\ E &= \int_{-1}^{+1} w^2(x)\, dx = \frac{4}{175}. \end{aligned}$$

Verifique que

$$\sigma_y^2 = \sigma_{\widehat{y}}^2 + E.$$

Finalmente,

$$r_{x,y} = \frac{\sigma_{\widehat{y}}}{\sigma_y} = \sqrt{\frac{64}{75} \times \frac{105}{92}} = \sqrt{\frac{112}{115}} = \frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{115}} = 0{,}986 \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
P03, 17 Set 2004
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

Não se esqueça da notação de vetores:

1. com uma seta sobre a letra: $\vec{\imath}$ ou $\vec{a}$ (esta é a forma mais comum entre os físicos) ou
2. com um til *sob* a letra: $\underset{\sim}{i}$, ou $\underset{\sim}{a}$ (esta é a forma mais popular entre os engenheiros, e é a minha preferida),

e garanta seus pontos nas questões ☨

1 [10,0] A função distribuição acumulada (FDA) de Gumbel é

$$F_X(x) = \exp\left[-\exp\left(-\frac{x-u}{a}\right)\right].$$

A relação dos parâmetros u e a com a média μ e o desvio-padrão σ de população é

$$a = \frac{\sqrt{6}\,\sigma}{\pi},$$
$$u = \mu - 0{,}5772a.$$

a) [2,0] Obtenha a função densidade de probabilidade $f_X(x)$ (FDP) correspondente.

b) [2,0] Para um vetor de observações $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$, obtenha a função de verossimilhança $L(\mathbf{x}; u, a)$ e o seu log, $\ln L$.

c) [4,0] Faça $\partial \ln L/\partial a = 0$, $\partial \ln L/\partial u = 0$ e mostre que as duas equações para u, a são

$$\sum_{i=1}^{n} e^{-\frac{x_i-u}{a}} = n,$$
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a}\left(1 - e^{-\frac{x_i-u}{a}}\right) = n.$$

d) [2,0] Como você faria para obter u e a pelo método da máxima verossimilhança, isto é: como você resolveria as duas equações acima, a partir de um vetor de observações $\mathbf{x}$, para calcular u e a?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A FDP é

$$f_X(x) = \frac{dF_X}{dx} = \frac{1}{a}\exp\left[-\frac{x-u}{a} - \exp\left(-\frac{x-u}{a}\right)\right].$$

Portanto, a função de verossimilhança é

$$L = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a}\exp\left[-\frac{x_i-u}{a} - \exp\left(-\frac{x_i-u}{a}\right)\right].$$

O seu log é

$$\ln L = \sum_{i=1}^{n}\left[-\exp\left(-\frac{x_i-u}{a}\right) - \frac{x_i-u}{a} - \ln a\right].$$

Continue a solução no verso ⟹

Agora,

$$\frac{d\ln L}{du} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a} - \frac{\exp(-\frac{x_i-u}{a})}{a} = 0, \Rightarrow$$
$$\sum_{i=1}^{n} \exp(-\frac{x_i - u}{a}) = n \blacksquare$$

Este resultado pode então ser usado para simplificar a próxima equação:

$$\frac{d\ln L}{da} = \sum_{i=1}^{n} \frac{-(x_i-u)\exp(-\frac{x_i-u}{a})}{a^2} + \frac{x_i-u}{a^2} - \frac{1}{a} = 0, \Rightarrow$$
$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i \exp(-\frac{x_i-u}{a})}{a^2} + \frac{un}{a^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i-u}{a^2} - \frac{n}{a} = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a}\left(1 - \exp(-\frac{x_i-u}{a})\right) = n \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
P04, 01 Out 2004
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ______________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

1 [5,0] Utilizando a mesma linha de desenvolvimento utilizada para provar o Teorema da Convolução, prove o **Teorema de Parseval**:

$$\int_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)\widehat{g}(-k)\,dk = 2\pi \int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\,dx.$$

Sugestão: Substitua $\widehat{g}(-k)$ no lado esquerdo da equação acima por sua definição:

$$\widehat{g}(k) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-ikx}\,dx \;\Rightarrow\; \widehat{g}(-k) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} g(x)e^{ikx}\,dx,$$

e depois troque a ordem da integração dupla, etc.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\int_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)\widehat{g}(-k)\,dk =$$

$$\int_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) \int_{x=-\infty}^{+\infty} g(x)e^{ikx}\,dx\,dk =$$

$$2\pi \int_{x=-\infty}^{+\infty} g(x) \left[\frac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}\,dk\right] dx =$$

$$2\pi \int_{x=-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,dx \;\blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [5,0] Uma **função periódica** de amplitude A_0 e número de onda k_0 pode ser representada genericamente por $f(x) = A_0 e^{ik_0 x}$. Se $f(x) = A_0 e^{ik_0 x}$, mostre que $\widehat{f}(k) = 2\pi A_0 \delta(k - k_0)$.
Sugestão: Calcule

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} A_0 e^{+ik_0 x} e^{-ikx}\, dx \\ &= \lim_{L\to\infty} A_0 \int_{x=-L}^{+L} e^{-i(k-k_0)x}\, dx.\end{aligned}$$

No desenvolvimento, vai ser útil fazer a substituição $p = k - k_0$, e usar o fato:

$$\lim_{L\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(Lp)}{\pi p} = \delta(p).$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\widehat{f}(k) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} A_0 e^{+ik_0 x} e^{-ikx}\, dx =$$

$$\lim_{L\to\infty} A_0 \int_{x=-L}^{+L} e^{-i(k-k_0)x}\, dx =$$

$$\lim_{L\to\infty} \frac{A_0}{-i(k-k_0)} \int_{x=-L}^{+L} e^{-i(k-k_0)x}\, (-i(k-k_0)dx) =$$

$$\lim_{L\to\infty} \frac{A_0}{-i(k-k_0)} \left[e^{-i(k-k_0)x}\right]_{-L}^{+L} =$$

$$\lim_{L\to\infty} \frac{A_0}{(k-k_0)} 2\operatorname{sen}(k-k_0)L =$$

$$2\pi A_0 \lim_{L\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(k-k_0)L}{\pi(k-k_0)} =$$

$$2\pi A_0 \delta(k-k_0)\ \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
P05, 22 Out 2004
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

Não se esqueça da notação de vetores:

1. com uma seta sobre a letra: $\vec{\imath}$ ou $\vec{a}$ (esta é a forma mais comum entre os físicos) ou
2. com um til *sob* a letra: $\underset{\sim}{i}$, ou $\underset{\sim}{a}$ (esta é a forma mais popular entre os engenheiros, e é a minha preferida),

e garanta seus pontos nas questões ☨

1 [5,0] Encontre a função de Green do problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} + \frac{T}{(T+t)^2}x = f(t), \quad x(0) = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Inicialmente, o procedimento padrão de multiplicar por uma função G e integrar de 0 a ∞:

$$\begin{gathered}
\frac{dx}{d\tau} + \frac{T}{(T+\tau)^2}x = f(\tau) \\
G(\tau,t)\frac{dx}{d\tau} + x\frac{T}{(T+\tau)^2}G(\tau,t) = G(\tau,t)f(\tau) \\
\int_{\tau=0}^{\infty} G(\tau,t)\frac{dx}{d\tau}\,d\tau + \int_{\tau=0}^{\infty} x(\tau)\frac{T}{(T+\tau)^2}G(\tau,t)\,d\tau = \int_{\tau=0}^{\infty} G(\tau,t)f(\tau)\,d\tau \\
x(\tau)G(\tau,t)\Big|_{\tau=0}^{\infty} - \int_{\tau=0}^{\infty} x(\tau)\frac{\partial G(\tau,t)}{\partial\tau}\,d\tau + \int_{\tau=0}^{\infty} x(\tau)\frac{T}{(T+\tau)^2}G(\tau,t)\,d\tau = \int_{\tau=0}^{\infty} G(\tau,t)f(\tau)\,d\tau
\end{gathered}$$

Como se trata de um problema de valor inicial, interessa-me manter o termo $x(0)$; portanto, imponho

$$\lim_{\tau\to\infty} G(\tau,t) = 0$$

e prossigo:

$$-x(0)G(0,t) + \int_{\tau=0}^{\infty} x\left[-\frac{\partial G}{\partial\tau} + \frac{TG(\tau,t)}{(T+\tau)^2}\right]d\tau = \int_{\tau=0}^{\infty} G(\tau,t)f(\tau)\,d\tau.$$

Portanto, o problema adjunto que devemos resolver é

$$-\frac{dG}{d\tau} + \frac{T}{(T+\tau)^2}G = \delta(\tau - t),$$

onde $\delta(\cdot)$ é a delta de Dirac, e o símbolo de derivada ordinária é utilizado porque a equação pode ser integrada sem que seja necessário considerar a dependência de G em t. Para resolver a equação diferencial, tento:

$$\begin{gathered}
G(\tau,t) = u(\tau,t)v(\tau,t) \;\Rightarrow \\
u\left[-\frac{dv}{d\tau} + \frac{T}{(T+\tau)^2}v\right] - v\frac{du}{d\tau} = \delta(\tau - t)
\end{gathered}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

zerando o termo entre colchetes:

$$
\begin{aligned}
-\frac{dv}{d\tau} + \frac{T}{(T+\tau)^2}v &= 0\\
\frac{dv}{d\tau} &= \frac{Tv}{(T+\tau)^2}\\
\frac{dv}{v} &= \frac{Td\tau}{(T+\tau)^2}
\end{aligned}
$$

Uma pequena pausa: considere

$$
\int_a^b \frac{dx}{x};
$$

quando a e b são reais, não faz sentido o caso $ab < 0$. Em outras palavras é possível integrar $f(x) = 1/x$ em um intervalo onde $x < 0$ *ou* em um intervalo onde $x > 0$, mas não *através* de $x = 0$; portanto, não faz sentido (por exemplo)

$$
\int_{x=-1}^2 \frac{dx}{x}.
$$

Portanto, nós vamos sempre supor que os sinais de a e b são iguais, donde

$$
\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln\frac{b}{a}
$$

sem a necessidade do módulo. Prosseguindo com a solução,

$$
\begin{aligned}
\int_{w=v(0,t)}^{v(\tau,t)} \frac{dw}{w} &= \int_{\theta=0}^{\tau} \frac{Td\theta}{(T+\theta)^2}\\
\ln\frac{v(\tau,t)}{v(0,t)} &= \frac{\tau}{T+\tau}
\end{aligned}
$$

exponenciando:

$$
v(\tau,t) = v(0,t)\exp\left[\frac{\tau}{T+\tau}\right]
$$

A equação diferencial agora simplifica-se (!) para

$$
\begin{aligned}
-v(0,t)\exp\left[\frac{\tau}{T+\tau}\right]\frac{du}{d\tau} &= \delta(\tau-t) \;\Rightarrow\\
\int_{u(0,t)}^{u(\tau,t)} du &= \int_{\theta=0}^{\tau} -\frac{1}{v(0,t)}\exp\left[-\frac{\theta}{T+\theta}\right]\delta(\theta-t)\,d\theta\\
u(\tau,t) - u(0,t) &= -\frac{1}{v(0,t)}H(\tau-t)\exp\left[-\frac{t}{T+t}\right]\\
u(\tau,t) &= u(0,t) - \frac{1}{v(0,t)}H(\tau-t)\exp\left[-\frac{t}{T+t}\right]
\end{aligned}
$$

Reunindo agora a solução,

$$
G(\tau,t) = u(\tau,t)v(\tau,t)
$$

$$
G(\tau,t) = e^{\frac{\tau}{T+\tau}}\left[\underbrace{u(0,t)v(0,t)}_{G(0,t)} - H(\tau-t)e^{-\frac{t}{T+t}}\right]
$$

Para encontrar $G(0,t)$, note que

$$
\begin{aligned}
\lim_{\tau\to\infty} G(\tau,t) = 0 \;\Rightarrow\\
\lim_{\tau\to\infty} e^{\frac{\tau}{\tau+T}}\left[G(0,t) - e^{-\frac{t}{T+t}}\right] = 0.
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Como $\exp(\tau/(T+\tau))$ cresce sem limite quando $\tau \to \infty$, a única alternativa é zerar o termo entre colchetes; portanto,

$$G(0,t) = e^{-\frac{t}{T+t}},$$

e, finalmente,

$$G(\tau,t) = [1 - H(\tau - t)] \exp\left[\frac{\tau}{T+\tau} - \frac{t}{T+t}\right] \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [5,0] *Nem sempre os espíritos de Euler e Jacques Chambriard são necessários*. Em sala de aula, ao procurarmos função de Green do problema

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = f(t), \;\; x(0) = a, \; \frac{dx(0)}{dt} = b,$$

nós obtivemos

$$\frac{d^2G}{d\tau^2} + \omega^2 G = \delta(\tau - t), \;\; G(\infty) = 0, \frac{dG(\infty)}{d\tau} = 0,$$

e

$$G(\tau,t) = \left[A_0(t) + \frac{H(\tau-t)}{2i\omega} e^{-i\omega t}\right] e^{+i\omega\tau} + \left[B_0(t) - \frac{H(\tau-t)}{2i\omega} e^{+i\omega t}\right] e^{-i\omega\tau}.$$

Obtenha $A_0(t)$ e $B_0(t)$ de uma forma totalmente *racional* (ou seja: sem recurso a nenhum tipo de intuição, "iluminação divina", ou identidade trigonométrica), simplesmente notando que, já que $\lim_{\tau\to\infty} |e^{\pm i\omega\tau}| \neq 0$, então é preciso impor $\lim_{\tau\to\infty}[\cdot] = 0$ nos dois colchetes acima. **Procure deixar claros todos os passos.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Da mesma forma que na 1ª questão, os termos entre colchetes têm que ser identicamente nulos quando $\tau > t \;\Rightarrow\; H(\tau - t) = 1$:

$$A_0(t) + \frac{e^{-i\omega t}}{2i\omega} = 0$$
$$A_0(t) = -\frac{e^{-i\omega t}}{2i\omega} \;\blacksquare$$

$$B_0(t) - \frac{e^{+i\omega t}}{2i\omega} = 0$$
$$B_0(t) = \frac{e^{+i\omega t}}{2i\omega} \;\blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

TT009 Matemática Aplicada I
P06, 05 Nov 2004
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

Não se esqueça da notação de vetores:

1. com uma seta sobre a letra: $\vec{\imath}$ ou $\vec{a}$ (esta é a forma mais comum entre os físicos) ou
2. com um til *sob* a letra: $\underset{\sim}{i}$, ou $\underset{\sim}{a}$ (esta é a forma mais popular entre os engenheiros, e é a minha preferida),

e garanta seus pontos nas questões ☨

1 [10,0] Considere o problema geral de Sturm-Liouville,

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y(x) + \lambda w(x)y(x) = 0.$$

e o caso particular

$$\begin{gathered}\frac{d}{dx}\left[e^{-2x}\frac{dy}{dx}\right] + \lambda e^{-2x}y = 0,\\ y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.\end{gathered}$$

a) [2,0] Mostre que as condições de contorno do caso particular garantem a condição de ortognonalidade, $p(x)\left[y_n\frac{dy_m}{dx} - y_m\frac{dy_n}{dx}\right]_a^b = 0.$

b) [2,0] Mostre que a solução geral é da forma

$$y(x) = \begin{cases} e^x\left[A\,\mathrm{senh}(\sqrt{1-\lambda}x) + B\cosh(\sqrt{1-\lambda}x)\right], & \lambda \neq 1,\\ e^x(C+Dx), & \lambda = 1.\end{cases}$$

c) [2,0] $\lambda = 1$ não é um autovalor; por quê? (Lembre-se: não valem autovetores nulos em Álgebra Linear).

d) [2,0] Para $\lambda \neq 1$, mostre que $B = 0$, e que $\mathrm{senh}(\sqrt{1-\lambda}\,\pi) = 0$.

e) [2,0] Agora use $\mathrm{senh}(\sqrt{1-\lambda}\,x) = i\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda-1}\,x)$, e mostre que os autovalores são $\lambda_n = 1 + n^2$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a) As condições de contorno são $y(0) = y(\pi) = 0$; então, $a = 0$, $b = \pi$ e $y_{m,n}(0) = y_{m,n}(\pi) = 0$:

$$\left\{p(\pi)\left[y_n(\pi)\frac{dy_m(\pi)}{dx} - y_m(\pi)\frac{dy_n(\pi)}{dx}\right] - p(0)\left[y_n(0)\frac{dy_m(\pi)}{dx} - y_m(0)\frac{dy_n(\pi)}{dx}\right]\right\} \equiv 0 \blacksquare$$

b) Expandindo as derivadas,

$$\begin{gathered}\frac{d}{dx}\left[e^{-2x}\frac{dy}{dx}\right] + \lambda e^{-2x}y =\\ e^{-2x}\frac{d^2y}{dx^2} - 2e^{-2x}\frac{dy}{dx} + \lambda e^{-2x}y =\\ e^{-2x}\left[y''(x) - 2y'(x) + \lambda y\right].\end{gathered}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

A equação característica do termo entre colchetes é

$$r^2 - 2r + \lambda = 0,$$

com soluções $r = (1 \pm \sqrt{1-\lambda})$. O caso $\lambda = 1$ produz uma raiz dupla, e deve ser tratado separadamente. Neste caso, além da solução e^x, encontra-se uma segunda solução LI xe^x. Portanto, para $\lambda = 1$, a solução geral é do tipo $e^x(C + Dx)$. Para $\lambda \neq 1$, as raízes sao distintas, e

$$y = k_1 e^{(1+\sqrt{1-\lambda})x} + k_2 e^{(1-\sqrt{1-\lambda})x}$$

Faça $k_1 = (B + A)/2$, $k_2 = (B - A)/2$, e obtenha

$$\begin{aligned} y &= e^x \left[k_1 e^{+\sqrt{1-\lambda}\,x} + k_2 e^{-\sqrt{1-\lambda}\,x} \right] \\ &= e^x \left[B \frac{e^{+\sqrt{1-\lambda}\,x} + e^{-\sqrt{1-\lambda}\,x}}{2} + A \frac{e^{+\sqrt{1-\lambda}\,x} - e^{-\sqrt{1-\lambda}\,x}}{2} \right] \\ &= e^x \left[B \cosh \sqrt{1-\lambda}\,x + A \operatorname{senh} \sqrt{1-\lambda}\,x \right] \blacksquare \end{aligned}$$

c) Se $\lambda = 1$, a solução é do tipo $e^x(C + Dx)$; impondo as condições de contorno, encontra-se $C = D = 0$ (pois $e^x \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$). Como um problema de autovalor não admite, por definição, soluções triviais ($y(x) \equiv 0$), $\lambda = 1$ não é um autovalor $\blacksquare$

d) Como $\cosh(0) = 1$, impondo-se $y(0) = 0$ encontra-se $B = 0$. Agora, $\operatorname{senh}(0) = 0$, de modo que resta impor

$$y(\pi) = 0 \;\Rightarrow\; A \operatorname{senh} \sqrt{1-\lambda}\,\pi = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{senh} \sqrt{1-\lambda}\,\pi = 0,$$

pois A deve ser diferente de zero para fugir da solução trivial $\blacksquare$

e)

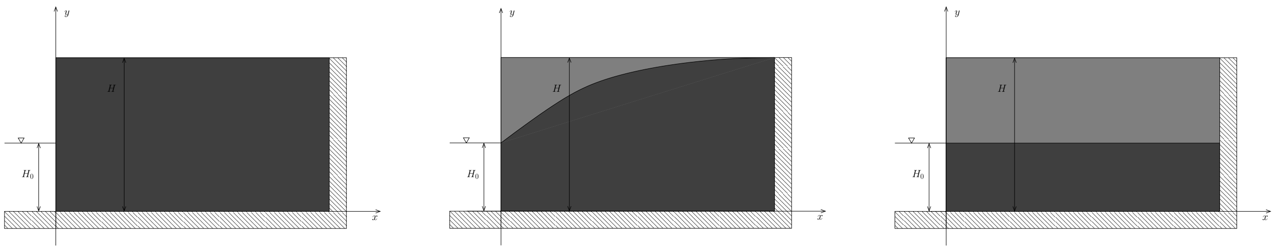
$$\begin{aligned} \operatorname{senh} \sqrt{1-\lambda}\pi &= 0 \\ i \operatorname{sen} \sqrt{\lambda - 1}\pi &= 0 \\ \sqrt{\lambda - 1} &= n \\ \lambda &= 1 + n^2 \;\blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
P07, 19 Nov 2004
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

A figura abaixo mostra 3 estágios do esvaziamento de um maciço poroso de porosidade drenável f e condutividade hidráulica saturada k. Em $t = 0$, todo o maciço está saturado até a altura H; em um instante intermediário, formou-se uma superfície freática, e em $t = \infty$ a superfície freática alcança (assintoticamente, apenas) o nível H_0 do canal para o qual ela drena. A região hachurada indica um contorno impermeável.



A equação governante é a equação não-linear de Boussinesq,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{f}\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right).$$

Todas as questões desta prova referem-se a este problema.

1 [1,0] Linearize a equação de Boussinesq, obtendo

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k\overline{h}}{f}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \equiv \alpha^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}.$$

Explique como a linearização pode ser feita, e sugira um valor **razoável** para $\overline{h}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Faça

$$\frac{\partial h}{\partial t} \approx \frac{k}{f}\frac{\partial}{\partial x}\overline{h}\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{k\overline{h}}{f}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}.$$

O valor mais óbvio (mas não o único possível) para $\overline{h}$ é $(H_0 + H)/2$. Praticamente qualquer valor *garantidamente* maior que H_0 e menor que H é uma resposta válida.

Continue a solução no verso ⟹

2 [1,5] Abaixo estão as condições iniciais e de contorno do problema. Explique fisicamente cada uma delas. **Use apenas os espaços designados.**

$$h(x,0) = H$$

O nível freático em $t = 0$ é H em todo o domínio.

$$h(0,t) = H_0$$

O nível do freático em $x = 0$ é H_0 para todo $t > 0$.

$$\frac{\partial h(L)}{\partial x} = 0$$

Devido ao contorno impermeável, não há fluxo horizontal em $x = L$.

3 [1,5] Faça

$$\phi(x,t) = h(x,t) - H_0;$$

note que H_0 é constante; obtenha a equação diferencial

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}.$$

Mostre que as condições de contorno em ϕ são mais simples:

$$\phi(0,t) = 0 \ \text{ e } \ \frac{\partial \phi(L)}{\partial x} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Já que $h(x,t) = \phi(x,t) + H_0$,

$$\frac{\partial(\phi + H_0)}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2(\phi + H_0)}{\partial x^2} \ \Rightarrow \ \frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2};$$

As condições inicial e de contorno em ϕ serão:

$$\begin{aligned} \phi(x,0) &= h(x,0) - H_0 = H - H_0, \\ \phi(0,t) &= h(0,t) - H_0 = H_0 - H_0 = 0, \\ \frac{\partial \phi(L,t)}{\partial x} &= \frac{\partial (h(L,t) - H_0)}{\partial x} = \frac{\partial h(L,t)}{\partial x} = 0 \ \blacksquare \end{aligned}$$

4 [4,0] Separe as variáveis: $\phi(x,t) = X(x)T(t)$. Obtenha

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda.$$

Discuta o sinal de λ em função das condições de contorno em $X(0)$ e $dX(L)/dx$. Mostre que apenas $\lambda < 0$ produz soluções não-triviais. **Sugestão:** para $\lambda > 0$ a imposição das condições de contorno é muito mais fácil se a solução for expressa em termos de $\cosh(\cdot)$ e $\operatorname{senh}(\cdot)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Se

$$\phi(x,t) = X(x)T(t),$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

A equação diferencial fica

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial XT}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 XT}{\partial x^2} \;\Rightarrow \\
XT' &= \alpha^2 T X'' \;\Rightarrow \\
\frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} &= \lambda.
\end{aligned}
$$

Para

$$
\frac{d^2X}{dx^2} - \lambda X = 0,
$$

se $\lambda > 0$,

$$
\begin{aligned}
X(x) &= k_1 \cosh(\lambda x) + k_2 \operatorname{senh}(\lambda x), \\
\frac{dX}{dx} &= \lambda \left[k_1 \operatorname{senh}(\lambda x) + k_2 \cosh(\lambda x) \right].
\end{aligned}
$$

Agora,

$$
\begin{aligned}
X(0) = 0 &\;\Rightarrow\; k_1 = 0, \\
\frac{dX(L)}{dx} = 0 &\;\Rightarrow\; \lambda k_2 \cosh(\lambda L) = 0 \Leftrightarrow k_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\lambda > 0$ produz apenas a solução trivial. Para $\lambda = 0$,

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2X}{dx^2} = 0 &\;\Rightarrow\; X(x) = k_3 x + k_4 \\
X(0) = 0 &\;\Rightarrow\; k_4 = 0, \\
\frac{dX(L)}{dx} = 0 &\;\Rightarrow\; k_3 = 0.
\end{aligned}
$$

Novamente, $\lambda = 0$ produz somente a solução trivial. Finalmente, se $\lambda < 0$,

$$
\begin{aligned}
X(x) &= k_5 \cos(-\lambda x) + k_6 \operatorname{sen}(-\lambda x), \\
\frac{dX}{dx} &= -\lambda \left[-k_5 \operatorname{sen}(-\lambda x) + k_6 \cos(-\lambda x) \right], \\
X(0) = 0 &\;\Rightarrow\; k_5 = 0, \\
\frac{dX(L)}{dx} = 0 &\;\Rightarrow\; -\lambda k_6 \cos(-\lambda L) = 0 \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

5 [2,0] Mostre que as autofunções possíveis são do tipo

$$
X_n(x) = \operatorname{sen}\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{L} \right).
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continuando o resultado da última questão, faça $-\lambda = \mu > 0$:

$$
\begin{aligned}
\cos(\mu_n L) &= 0, \\
\mu_n L &= (n + \frac{1}{2})\pi = (2n+1)\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow \\
\mu_n &= (2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{1}{L}.
\end{aligned}
$$

As autofunções são, portanto:

$$
X_n(x) = \operatorname{sen}\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{L} \right) \;\blacksquare
$$

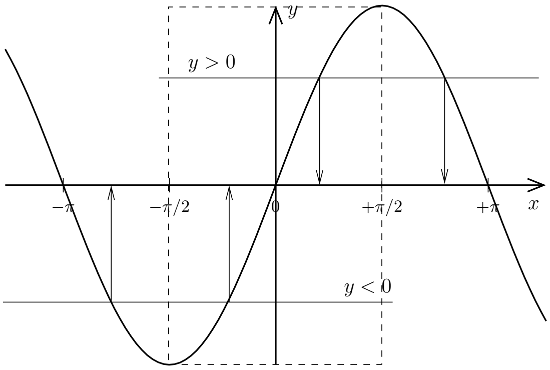
Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
Q01, 29 Nov 2004
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

---

1 [3,0] A figura abaixo mostra mostra a função $Y = \operatorname{sen} X$. Na região em tracejado, $\operatorname{sen} X$ é inversível, e $X = \operatorname{arcsen} Y$. Suponha que X seja uma variável aleatória entre $-\pi$ e $+\pi$. $F_X(x)$ significa a função distribuição acumulada (FDA) de X. Idem para Y.



a) [2,0] Explique de forma **clara**, e **com o auxílio das setas verticais**, o significado de:

$$Y \geq 0 \;\Rightarrow\; F_Y(y) = F_X(\operatorname{arcsen} y) + 1 - F_X(\pi - \operatorname{arcsen} y),$$
$$Y < 0 \;\Rightarrow\; F_Y(y) = F_X(\operatorname{arcsen} y) - F_X(-\pi - \operatorname{arcsen} y).$$

b) [1,0] Se $F_X(x) = (x+\pi)/(2\pi)$, Obtenha uma expressão **única** para $F_Y(y)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a) Para $y \geq 0$, se $-\pi \leq X \leq \operatorname{arcsen} y$, ou se $\pi - \operatorname{arcsen} y < X \leq +\pi$, então $Y = \operatorname{sen} X \leq y$. Portanto, a probabilidade $F_Y(y) = P\{Y \leq y\}$ é a mesma que X esteja dentro destes intervalos, dada pela primeira expressão acima. Por outro lado, se $y < 0$, para $-\pi - \operatorname{arcsen} y < X \leq \operatorname{arcsen} y$, então $Y = \operatorname{sen} X \leq y$. A segunda expressão acima indica a probabilidade de que X esteja neste intervalo.

b) Se $y \geq 0$,

$$F_Y(y) = \frac{\operatorname{arcsen} y + \pi}{2\pi} + 1 - \frac{\pi - \operatorname{arcsen} y + \pi}{2\pi} = \frac{2\operatorname{arcsen} y + \pi}{2\pi}.$$

Se $y < 0$,

$$F_Y(y) = \frac{\operatorname{arcsen} y + \pi}{2\pi} - \frac{-\pi - \operatorname{arcsen} y + \pi}{2\pi} = \frac{2\operatorname{arcsen} y + \pi}{2\pi},$$

que é a mesma expressão de antes.

Continue a solução no verso ⟹

2 [3,0] Zacharias Karl Tamboridéguy é aluno de Engenharia Ambiental da UFPR, e gosta de tocar pandeiro nas (poucas) horas vagas. Seus colegas o conhecem como "Z.K. Tamborim". Ele descobriu que pode modelar as vibrações do "couro" de seu pandeiro de raio a com a equação da onda em coordenadas polares. Se u é o deslocamento do "couro" e se Z.K. Tamborim supuser simetria radial, a equação governante será

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

com condições de contorno e iniciais

$$\begin{aligned} u(a,t) &= 0, \\ u(r,0) &= 0, \\ \frac{\partial u(r,0)}{\partial t} &= v_0(r). \end{aligned}$$

Sabendo que

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0$$

é a equação diferencial de Bessel de ordem 0, cuja solução geral é $y(x) = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x)$, e que $Y_0(x)$ possui uma singularidade logaritmica em $x = 0$, mostre como Z.K. Tamborim obteve a solução $u(r,t)$ para o couro do seu tamborim por separação de variáveis. Em sua solução, você deve deixar os coeficientes de Fourier da solução indicados em termos de integrais envolvendo as funções de Bessel $J_0(x)$, **sem tentar resolvê-las**.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Primeiramente, eu expando a derivada parcial em relação a r, obtendo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Faço $u = R(r)T(t)$ e substituo na equação acima, obtendo

$$\frac{d^2R}{dr^2}T + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}T = \frac{1}{c^2}\frac{d^2T}{dt^2}R.$$

Dividindo por RT,

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{rR}\frac{dR}{dr} = \frac{1}{c^2T}\frac{d^2T}{dt^2} = -\lambda.$$

O sinal de menos acima é para simplificar a álgebra subseqüente. A equação diferencial ordinária em R será

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \lambda R = 0.$$

Isto é "quase" a equação de Bessel, e eu ainda preciso da mudança de variável

$$x = \sqrt{\lambda}r,$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{dR}{dr}, \\ \frac{d^2R}{dx^2} &= \frac{1}{\lambda}\frac{d^2R}{dr^2}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial ordinária original, encontro

$$\lambda\left[\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + R\right] = 0,$$

e agora sim, tenho a equação de Bessel dentro dos colchetes. As soluções possíveis são do tipo

$$R(r) = k_1 J_0(\sqrt{\lambda}r) + k_2 Y_0(\sqrt{\lambda}r).$$

Continue a solução no verso ⟹

Como a minha solução $u(r,t)$ deve ser finita em $r = 0$, no centro do pandeiro, devo ter necessariamente $k_2 = 0$ para evitar singularidades logaritmicas. Com isto, a condição de contorno que preciso atender será

$$u(a,t) = R(a)T(t) = 0 \ \Rightarrow \ J_0(\sqrt{\lambda_n}a) = 0.$$

Os autovalores λ_n são os valores que produzem os sucessivos zeros de $J_0(x)$ na equação acima. Sem perda de generalidade, portanto, as autofunções do problema de Sturm-Liouville são

$$R_n(r) = J_0(\lambda_n r).$$

Neste ponto, é importante lembrar que a equação diferencial em R pode ser posta na forma

$$\frac{d}{dr}\left[r\frac{dR}{dr}\right] + \lambda r R = 0,$$

e que portanto função "peso" é $w(r) = r$, e os produtos internos são do tipo

$$(f(r), g(r)) = \int_0^a f(r)g(r)r\,dr.$$

Finalmente, só fazem sentido λ_n's positivos. Com isto, fica imediatamente definida a equação diferencial em T:

$$\frac{d^2T_n}{dt^2} + \lambda_n c^2 T_n(t) = 0.$$

Esta é uma velha conhecida, com solução geral

$$\begin{aligned} T_n(t) &= A_n\cos(c\sqrt{\lambda_n}t) + B_n\,\mathrm{sen}(c\sqrt{\lambda_n}t),\\ \frac{dT_n}{dt} &= c\sqrt{\lambda_n}\left[-A_n\,\mathrm{sen}(c\sqrt{\lambda_n}t) + B_n\cos(c\sqrt{\lambda_n}t)\right]. \end{aligned}$$

A solução geral será

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos(c\sqrt{\lambda_n}t) + B_n\,\mathrm{sen}(c\sqrt{\lambda_n}t)\right]J_0(\sqrt{\lambda_n}r).$$

Vamos agora às condições iniciais:

$$\begin{aligned} u(r,0) = 0 &= \sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_0(\sqrt{\lambda_n}r) \ \Rightarrow \ A_n = 0, \forall n,\\ \frac{\partial u(r,0)}{\partial t} = v_0(r) &= \sum_{n=1}^{\infty}c\sqrt{\lambda_n}B_nJ_0(\sqrt{\lambda_n}r). \end{aligned}$$

O procedimento para a obtenção de B_n é clássico (note a presença da função peso):

$$\begin{aligned} v_0(r)J_0(\sqrt{\lambda_m}r)r &= \sum_{n=1}^{\infty}c\sqrt{\lambda_n}B_nJ_0(\sqrt{\lambda_n}r)J_0(\sqrt{\lambda_m}r)r,\\ \int_{r=0}^{a}\left(v_0(r)J_0(\sqrt{\lambda_m}r)r\right)\,dr &= \int_{r=0}^{a}\left(\sum_{n=1}^{\infty}c\sqrt{\lambda_n}B_nJ_0(\sqrt{\lambda_n}r)J_0(\sqrt{\lambda_m}r)r\right)\,dr,\\ \int_{r=0}^{a}\left(v_0(r)J_0(\sqrt{\lambda_m}r)r\right)\,dr &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{r=0}^{a}c\sqrt{\lambda_n}B_nJ_0(\sqrt{\lambda_n}r)J_0(\sqrt{\lambda_m}r)r\,dr\right). \end{aligned}$$

Como as autofunções $J_0(\sqrt{\lambda_{m,n}}r)$ do problema de Sturm-Liouville são mutuamente ortogonais, apenas o termo $n = m$ do somatório sobrevive, produzindo o resultado final para B_m (a menos da solução das próprias integrais):

$$\int_{r=0}^{a}v_0(r)J_0(\sqrt{\lambda_m}r)r\,dr = c\sqrt{\lambda_m}B_m\int_{r=0}^{a}\left[J_0(\sqrt{\lambda_m}r)\right]^2 r\,dr \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [3,0] Se $f(x)$ é uma função qualquer de x, e se sua transformada de Fourier é $\mathcal{F}\{f(x)\}$, mostre que

$$\mathcal{F}\{xf(x)\} = \int_{x=-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-ikx}\,dx = i\frac{d\mathcal{F}\{f(x)\}}{dk},$$

usando obrigatoriamente o fato:

$$\frac{d}{dk}\left[f(x)e^{-ikx}\right] = -ixf(x)e^{-ikx}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\int_{x=-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-ikx}\,dx &= \frac{1}{-i}\int_{x=-\infty}^{+\infty} -ixf(x)e^{-ikx}\,dx \\
&= \frac{i}{-i^2}\int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dk}\left[f(x)e^{-ikx}\right]\,dx \\
&= i\frac{d}{dk}\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx \\
&= i\frac{d\mathcal{F}\{f(x)\}}{dk} \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [1,0] Obtenha a série de Fourier de $f(x) = 1$, $-\pi \le x \le +\pi$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A resposta curta é: a série de Fourier de 1 é 1! A resposta um pouco mais longa é: a série de Fourier é

$$f(x) = 1 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\right].$$

Compare: como 1 é par e os senos são ímpares, $b_n = 0, \forall n$; a_0 é necessariamente igual a 2, e todos os outros a_n's são nulos:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \, dx = 0, \forall n > 0.$$

Fim da questão ■

Continue a solução no verso ⟹