TT009 Matemática Aplicada I
P01, 26 Mar 2004
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ______________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

Não se esqueça da notação de vetores:

1. com uma seta sobre a letra: $\vec{\imath}$ ou $\vec{a}$ (esta é a forma mais comum entre os físicos) ou
2. com um til *sob* a letra: $\underset{\sim}{i}$, ou $\underset{\sim}{a}$ (esta é a forma mais popular entre os engenheiros, e é a minha preferida),

e garanta seus pontos nas questões ☦

1 [5,0] Considere um sistema rígido de eixos x_0, y_0, z_0 mutuamente ortogonais e orientados segundo a regra da mão direita. Os eixos sofrem duas rotações *simples* consecutivas:

1. uma rotação positiva (segundo a regra da mão direita) de um ângulo $\alpha_1 < \pi/2$ em redor do eixo original z_0.
2. uma rotação positiva (segundo a regra da mão direita) de um ângulo $\alpha_2 < \pi/2$ em redor do eixo original x_0.

Obtenha a matriz de rotação de coordenadas $C_{i,j} = (\mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_i)$. **Sugestão:** componha duas rotações planas, cada uma das quais com matriz de rotação dada por

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Houve um erro tipográfico na matriz de rotação sugerida na prova. De acordo com a convenção dada em aula, ela é a matriz acima, que é a *transposta* da impressa na prova. *Este erro (meu) foi considerado na correção.* Na base original $\{\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0\}$, as duas matrizes simples de rotação deste problema são:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\operatorname{sen}\alpha_1 & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$
$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_2 & -\operatorname{sen}\alpha_2 \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix}$$

Tudo o que precisamos agora é saber aonde "vão parar" $\mathbf{i}_0$, $\mathbf{j}_0$ e $\mathbf{k}_0$ após as duas rotações consecutivas:

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}_1 &= \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{i}_0 = (\cos\alpha_1, \operatorname{sen}\alpha_1, 0);\\
\mathbf{i}' = \mathbf{i}_2 &= \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{i}_1 = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2 \operatorname{sen}\alpha_1, \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2);\\
\mathbf{j}_1 &= \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{j}_0 = (-\operatorname{sen}\alpha_1, \cos\alpha_1, 0);\\
\mathbf{j}' = \mathbf{j}_2 &= \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{j}_1 = (-\operatorname{sen}\alpha_1, \cos\alpha_2 \cos\alpha_1, \cos\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2);\\
\mathbf{k}_1 &= \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{k}_0 = (0, 0, 1);\\
\mathbf{k}' = \mathbf{k}_2 &= \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{k}_1 = (0, -\operatorname{sen}\alpha_2, \cos\alpha_2).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\operatorname{sen}\alpha_1 & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha_1 \cos\alpha_2 & \cos\alpha_1 \cos\alpha_1 & -\operatorname{sen}\alpha_2 \\ \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2 & \cos\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

Suponha agora que um(a) aluno(a) tenha sido confundido(a) pelo erro tipográfico. Ele(a) obterá então as matrizes

$$\mathbf{R}_1^* = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \operatorname{sen}\alpha_1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{R}_2^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_2 & \operatorname{sen}\alpha_2 \\ 0 & -\operatorname{sen}\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix}$$

Continuando na mesma linha de raciocício, o(a) aluno(a) encontrará:

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}_1 &= \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{i}_0 = (\cos\alpha_1, -\operatorname{sen}\alpha_1, 0); \\
\mathbf{i}' = \mathbf{i}_2 &= \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{i}_1 = (\cos\alpha_1, -\cos\alpha_2 \operatorname{sen}\alpha_1, \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2); \\
\mathbf{j}_1 &= \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{j}_0 = (\operatorname{sen}\alpha_1, \cos\alpha_1, 0); \\
\mathbf{j}' = \mathbf{j}_2 &= \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{j}_1 = (\operatorname{sen}\alpha_1, \cos\alpha_1 \cos\alpha_2, -\cos\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2); \\
\mathbf{k}_1 &= \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{k}_0 = (0, 0, 1); \\
\mathbf{k}' = \mathbf{k}_2 &= \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{k}_1 = (0, \operatorname{sen}\alpha_2, \cos\alpha_2).
\end{aligned}$$

O resultado do aluno(a) "enganado(a)" será:

$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \operatorname{sen}\alpha_1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha_1 \cos\alpha_2 & \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 & \operatorname{sen}\alpha_2 \\ \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2 & -\cos\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2 & \cos\alpha 2 \end{bmatrix} \blacksquare$$

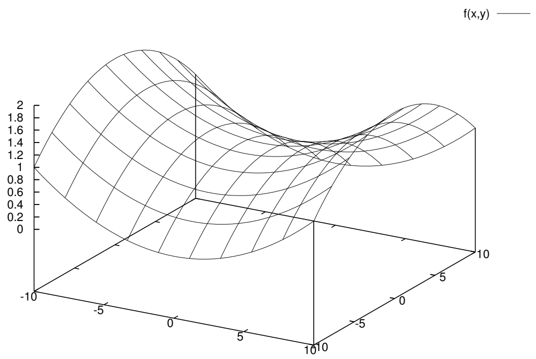
O(A)s aluno(a)s que obtiverem este último resultado também ganharão os pontos da questão.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [5,0] Um pavilhão de $20\,\text{m} \times 20\,\text{m}$ tem um teto com a forma de um parabolóide hiperbólico. Para um sistema de eixos x, y, z localizado no centro do pavilhão, $-10 \le x \le 10$ e $-10 \le y \le 10$, o formato do teto é dado por

$$z = \left(100 + x^2 - y^2\right)/100,$$

onde todas as dimensões estão em metros. Monte a integral em x, y que dá o valor da área da superfície do teto. **Não é necessário calcular a integral.**



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Use a fórmula

$$S = \int_{R_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dydx.$$

Calculando as derivadas parciais, encontra-se

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{100} = \frac{x}{50},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{100} = -\frac{y}{50},$$

donde

$$S = \int_{-10}^{10}\int_{-10}^{10} \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{2500}}\, dydx \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
P02, 12 Abr 2004
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

Não se esqueça da notação de vetores:

1. com uma seta sobre a letra: $\vec{\imath}$ ou $\vec{a}$ (esta é a forma mais comum entre os físicos) ou
2. com um til *sob* a letra: $\underset{\sim}{i}$, ou $\underset{\sim}{a}$ (esta é a forma mais popular entre os engenheiros, e é a minha preferida),

e garanta seus pontos nas questões ☦

1 [5,0] Se $P(t)$ é a concentração de uma substância poluidora em uma lagoa e $Q(t)$ é a carga de poluição lançada, a equação diferencial que rege $P(t)$ é

$$\frac{dP}{dt} + \frac{1}{T}P = \frac{1}{T}Q.$$

Para $P(0) = P_0$, faça a substituição obrigatória $P = uv$ e obtenha a solução em função de P_0 e Q.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Se $P = uv$,

$$\begin{aligned}
u\frac{dv}{dt} + v\frac{du}{dt} + \frac{uv}{T} &= \frac{Q(t)}{T} \\
u\left[\frac{dv}{dt} + \frac{v}{T}\right] + v\frac{du}{dt} &= \frac{Q}{T}.
\end{aligned}$$

Forçando o termo entre colchetes a se anular:

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} + \frac{v}{T} &= 0, \\
\frac{dv}{v} &= -\frac{dt}{T}, \\
\ln|v| &= -\frac{t}{T} + c_1 \\
v &= Ce^{-t/T}.
\end{aligned}$$

Substituindo no restante da equação,

$$\begin{aligned}
Ce^{-t/T}\frac{du}{dt} &= \frac{Q(t)}{T}, \\
C\,du &= \frac{1}{T}e^{t/T}Q(t)\,dt, \\
C(u-u_0) &= \frac{1}{T}\int_{\tau=0}^{t} e^{\tau/T}Q(\tau)\,d\tau, \\
u &= u_0 + \frac{1}{C}\left[\frac{1}{T}\int_{\tau=0}^{t} e^{\tau/T}Q(\tau)\,d\tau\right], \\
P = uv &= e^{-t/T}\left[Cu_0 + \frac{1}{T}\int_{\tau=0}^{t} e^{-\frac{t-\tau}{T}}Q(\tau)\,d\tau\right].
\end{aligned}$$

É eviente agora que $Cu_0 = P_0$, donde

$$P(t) = P_0e^{-t/T} + \frac{1}{T}\int_{\tau=0}^{t} e^{-\frac{t-\tau}{T}}Q(\tau)\,d\tau \;\blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [5,0] Encontre a solução geral e puramente real de

$$x^2 y'' + xy' + 9y = 0.$$

A sua resposta final **não** pode conter números complexos.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Esta é uma equação de Euler:

$$\begin{aligned} y &= x^m, \\ y' &= mx^{m-1}, \\ y'' &= (m-1)mx^{m-2}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial,

$$(m-1)m + m + 9 = 0,$$

donde $m = \pm 3i$. As soluções, portanto, são da forma $y = x^{\pm 3i}$. De $x^a = \exp(\ln x^a)$, vem

$$x^{\pm 3i} = \exp((\pm 3 \ln x)i) = \cos 3 \ln x \pm i \operatorname{sen} 3 \ln x.$$

A solução complexa geral é

$$y = c_1 \left[\cos 3 \ln x + i \operatorname{sen} 3 \ln x\right] + c_2 \left[\cos 3 \ln x - i \operatorname{sen} 3 \ln x\right].$$

Faça agora $c_1 = (a - ib)/2$ e $c_2 = (a + ib)/2$, com $a, b \in \mathbb{R}$, para obter, finalmente,

$$y = a \cos 3 \ln x + b \operatorname{sen} 3 \ln x \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
P04, 14 Mai 2004
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ______________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

Todas as questões desta prova referem-se à equação de Bessel de ordem zero:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0.$$

1 [2,0] Classifique o ponto $x = 0$ quanto à existência e natureza de singularidades.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{array}{lll} p(x) = \dfrac{1}{x} & xp(x) = 1 & \text{(analítica em } x = 0) \\ q(x) = 1 & x^2q(x) = x^2 & \text{(analítica em } x = 0) \end{array}$$

então este é um ponto singular regular.

2 [2,0] Sem aplicar diretamente o método de Frobenius, obtenha a equação indicial e suas raízes. Escreva em seguida, em função da natureza das raízes obtidas e ainda sem resolver a equação, a forma geral esperada das duas soluções linearmente independentes (L.I.).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} xp(x) &= p_0 + p_1x + p_2x^2 + \ldots = 1 && \Rightarrow\ p_0 = 1 \\ x^2q(x) &= q_0 + q_1x + q_2x^2 + \ldots = x^2 && \Rightarrow\ q_0 = 0 \\ r^2 + (p_0 - 1) + q_0 &= 0 && \Rightarrow\ r^2 = 0 \qquad \text{(raiz dupla)} \end{aligned}$$

A 1ª solução será do tipo Frobenius,

$$y_1 = \underbrace{x^r}_{=1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n;$$

a 2ª solução será do tipo

$$y_2 = y_1(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n.$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [6,0] O método de Frobenius garante que a tentativa

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

leva a pelo menos uma das duas soluções L.I.; no nosso caso, há apenas uma solução com esta forma: obtenha a forma geral dos a_n's desta solução.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
y'' + \frac{1}{x}y' + y &= 0\\
xy'' + y' + xy &= 0\\
y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}\\
y' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n) x^{r+n-1}\\
y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)(r+n-1) x^{r+n-2}\\
xy &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+1} = \sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} x^{r+m-1}\\
xy'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (r+n-1)(r+n) a_n x^{r+n-1}
\end{aligned}$$

Reunindo todos os termos em x^{r+m-1},

$$[a_0 r + a_0(r-1)r]\, x^{r-1} + [a_1(r+1) + a_1 r(r+1)]\, x^r + \sum_{n=2}^{\infty} \{a_n\, [(r+n) + (r+n-1)(r+n)] + a_{n-2}\}\, x^{r+n-1} = 0.$$

A equação indicial é

$$r + r^2 - r = 0 \;\Rightarrow\; r = 0 \;\Rightarrow\; a_1 = 0.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
a_n\, [n + (n-1)n] + a_{n-2} &= 0\\
a_n n^2 + a_{n-2} &= 0\\
a_n &= -\frac{a_{n-2}}{n^2}.
\end{aligned}$$

Para conseguir uma fórmula geral, note que

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{a_0}{2^2},\\
a_4 &= -\frac{a_2}{4^2} = +\frac{a_0}{4^2 \times 2^2} = +\frac{a_0}{(2\times 2)^2 (2\times 1)^2} = +\frac{a_0}{[2^2(2\times 1)]^2},\\
a_6 &= -\frac{a_4}{6^2} = -\frac{a_0}{6^2 \times 4^2 \times 2^2} = -\frac{a_0}{(2\times 3)^2(2\times 2)^2(2\times 1)^2} = -\frac{a_0}{[2^3(3\times 2\times 1)]^2},\\
&\vdots\\
a_{2k} &= (-1)^k \frac{a_0}{[2^k k!]^2}.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TT009 Matemática Aplicada I
P05, 28 Mai 2004
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ______________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

1 [5,0] Resolva, **usando obrigatoriamente transformada de Laplace**, o problema de valor inicial

$$3x' + x = 6e^{2t};\ x(0) = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A transformada de Laplace da equação diferencial é

$$\begin{aligned}
3s\overline{x} + \overline{x} &= \frac{6}{s-2},\\
\overline{x}(3s+1) &= \frac{6}{s-2},\\
\overline{x} &= \frac{6}{3(s-2)(s+1/3)} = \frac{2}{(s-2)(s+1/3)}.
\end{aligned}$$

Separando em frações parciais,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{(s-2)(s+1/3)} &= \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1/3},\\
A &= 6/7,\\
B &= -6/7.
\end{aligned}$$

Invertendo,

$$\begin{aligned}
\overline{x}(s) &= \frac{6/7}{s-2} - \frac{6/7}{s+1/3},\\
x(t) &= \frac{6}{7}e^{2t} - \frac{6}{7}e^{-t/3}.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [5,0] Conhecendo os fatos:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt,$$
$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi},$$

calcule a transformada de Laplace

$$\mathscr{L}[1/\sqrt{t}](s) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-st}\, dt.$$

Sugestão: procure introduzir uma mudança de variável apropriada nesta última equação, para escrevê-la na forma da integral definidora da função gama.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} &= \frac{1}{s}\int_0^\infty s^{1/2}(st)^{-1/2} e^{-st}\, sdt \\
&= s^{-1/2}\int_0^\infty (st)^{-1/2} e^{-st}\, d(st) \\
&= s^{-1/2}\int_0^\infty (u)^{1/2-1} e^{u}\, d(u) \\
&= s^{-1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{s}}.
\end{aligned}$$

Mas a solução realmente genial é a de Caroline Beleski Carneiro (que não seguiu a sugestão mas calculou a transformada de Laplace pedida, mesmo assim):

O conjunto de substituições

$$\begin{aligned}
st &= u^2 \\
sdt &= 2udu \\
dt &= \frac{2udu}{s} \\
t^{-1/2} &= \frac{\sqrt{s}}{u}
\end{aligned}$$

transforma a integral

$$\int_0^\infty t^{-1/2} e^{-st}\, dt$$

em

$$\frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-u^2}\, du = \frac{2}{\sqrt{s}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

Simplesmente brilhante.

Continue a solução no verso ⟹

TT009 Matemática Aplicada I
P06, 09 Jun 2004
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ______________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

---

1 [10,0] Uma viga bi-apoiada, isostática, está sujeita a um carregamento distribuído total

$$w(x) = \frac{w_0 L}{2}\delta(x) - w_0\left[H(x) - H(x-L)\right] + \frac{w_0 L}{2}\delta(x-L),$$

onde as δ's indicam duas reações de apoio iguais nas extremidades de um vão L; sobre o vão, o carregamento é uniforme e igual a $-w_0$. Sabendo que o esforço cortante $V(x)$ e o momento fletor $M(x)$ são dados por (**siga rigorosamente os sinais!**)

$$V(x) = \int_{-\infty}^{x} w(\xi)\,d\xi,$$
$$M(x) = \int_{-\infty}^{x} V(\xi)\,d\xi,$$

Obtenha $V(x)$ e $M(x)$ integrando a expressão dada para $w(x)$. **A utilização dos conceitos de teoria de distribuições é obrigatória.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Inicialmente, vamos obter um resultado auxiliar útil. Se $F'(x) = f(x)$, então

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x} f(\xi)H(\xi-a)\,d\xi &= \int_{-\infty}^{x} H(\xi-a)\,f(\xi)d\xi \\
&= H(\xi-a)F(\xi)\Big|_{-\infty}^{x} - \int_{-\infty}^{x} F(\xi)\delta(\xi-a)\,d\xi \\
&= H(x-a)F(x) - H(x-a)F(a) \\
&= H(x-a)[F(x) - F(a)].
\end{aligned}$$

Este resultado será repetidamente utilizado na seqüência.

Integrando $w(x)$ termo a termo,

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{w_0 L}{2}\delta(\xi)\,d\xi = \frac{w_0 L}{2}H(x);$$
$$\int_{-\infty}^{x} -w_0\left[H(x) - H(x-L)\right]\,d\xi = -w_0\left[xH(x) - (x-L)H(x-L)\right];$$
$$\int_{-\infty}^{x} \frac{w_0 L}{2}\delta(\xi-L)\,d\xi = \frac{w_0 L}{2}H(x-L).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
V(x) &= \frac{w_0 L}{2}H(x) - w_0\left[xH(x) - (x-L)H(x-L)\right] + \frac{w_0 L}{2}H(x-L), \\
M(x) &= \frac{w_0 L}{2}xH(x) - w_0\left[\frac{x^2}{2}H(x) - \frac{(x-L)^2}{2}H(x-L)\right] + \frac{w_0 L}{2}(x-L)H(x-L).
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TT009 Matemática Aplicada I
P06, 09 Jun 2004
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

---

1 [5,0] Dado o sistema de equações diferenciais lineares

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{u},$$

com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{bmatrix},$$

obtenha a solução geral $\mathbf{u}(t)$ **obrigatoriamente** em função dos autovetores $\mathbf{e}'_1$ e $\mathbf{e}'_2$ de $\mathbf{A}$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Os autovalores são as raízes da equação característica,

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}| = 0,$$
$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0,$$

que são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$. Os autovetores são

$$\mathbf{e}'_1 = (1, -\frac{\sqrt{2}}{2}), \quad \mathbf{e}'_2 = (1, \sqrt{2}).$$

A solução geral é

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{e}'_1 e^t + k_2\mathbf{e}'_2 e^{4t}.$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [5,0] A engenheira Sana Itária projetou um biodigestor **com retirada de gás** a uma taxa constante β. Se $x(t)$ é a população de bactérias do biodigestor e $y(t)$ é a quantidade de gás no biodigestor, Sana Itária supôs que as equações que regem o seu funcionamento são

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \alpha x - pxy, \\
\frac{dy}{dt} &= kx - \beta.
\end{aligned}
$$

Na seqüência, admita que $x(t=0) = x_0$, e $y(t=0) = 0$.

a) [2,0] Um sistema possui um ponto de equilíbrio quando é possível atingir um estado em que

$$
\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0.
$$

Mostre que o biodigestor de Sana Itária admite o ponto de equilíbrio $(x, y) = (\beta/k, \alpha/p)$. O que ele significa?

b) [3,0] Mostre que as trajetórias no espaço de fase do biodigestor de Sana Itária são soluções implícitas de

$$
k(x - x_0) - \beta \ln \frac{x}{x_0} = \alpha y - \frac{p}{2} y^2.
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a) Fazendo $dx/dt = 0$ e $dy/dt = 0$ obtém-se, imediatamente,

$$
(x, y) = (\beta/k, \alpha/p).
$$

Ele significa que existe um estado permanente possível, em que a população de bactérias se estabiliza em β/k, e a quantidade de gás em α/p.

b) Eliminando t,

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} &= \frac{\alpha x - pxy}{kx - \beta} \\
\frac{dx}{dy} &= \frac{\alpha - py}{k - \beta/x} \quad \Rightarrow \\
\left(k - \frac{\beta}{x}\right) dx &= (\alpha - py)\, dy \\
\int_{\xi = x_0}^{x} \left(k - \frac{\beta}{\xi}\right) d\xi &= \int_{\eta=0}^{y} (\alpha - p\eta)\, d\eta \\
k(x - x_0) - \beta \ln \frac{x}{x_0} &= \alpha y - \frac{p}{2} y^2.
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
Q01, 02 Jul 2004
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ______________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

---

1 [4,0] Usando qualquer método de sua escolha, encontre a solução geral de

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4 = -4x^3.$$

Atenção: a solução final não pode ser exibida sob a forma de uma série; eu não tentaria uma solução por séries se fosse você; a solução final tem que ser mostrada em forma fechada. Você pode estar interessada(o) em saber que uma das raízes da equação característica da equação diferencial homogênea associada é 2.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Sabendo que uma das raízes é 2, escrevo

$$\begin{aligned}(\lambda-2)(a\lambda^2+b\lambda+c) &= \lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4,\\ a\,\lambda^3+b\,\lambda^2-2\,a\,\lambda^2+c\,\lambda-2\,b\,\lambda-2\,c &= \lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4,\\ a\,\lambda^3+(b-2a)\,\lambda^2+(c-2b)\,\lambda-2\,c &= \lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4,\\ c &= 2,\\ b &= -3,\\ a &= 1.\end{aligned}$$

Agora, resolvendo

$$\lambda^2-3\lambda+2=0,$$

encontro as outras duas raízes, $\lambda = 2$ (novamente) e $\lambda = 1$. $\lambda = 2$, portanto, é uma raiz *dupla*, e três soluções LI da equação homogênea são: e^x, e^{2x} e xe^{2x}. A solução geral, portanto, é do tipo

$$y(x) = y_p(x) + C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3xe^{2x}.$$

Existem várias formas de encontrar uma solução particular $y_p(x)$; a mais fácil, já que o termo não-homogêneo é um polinômio, é tentar

$$\begin{aligned}y_p(x) &= Ax^3+Bx^2+Cx+D,\\ y_p'(x) &= 3Ax^2+2Bx+C,\\ y_p''(x) &= 6Ax+2B,\\ y_p'''(x) &= 6A,\end{aligned}$$

e substituir na equação diferencial original:

$$\begin{aligned}6A-5(6Ax+2B)+8(3Ax^2+2Bx+C)-4(Ax^3+Bx^2+Cx+D) &= -4x^3,\\ -4Ax^3+(-4B+24A)x^2+(-4C+16B-30A)x+(-4D+8C-10B+6A) &= -4x^3,\end{aligned}$$

donde: $A = 1$, $B = 6$, $C = 33/2$ e $D = 39/2$. Isto completa a questão.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [4,0] Calcule a integral

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{(x+1)^2}\,dx$$

usando o Teorema dos Resíduos:

- Para a função complexa $z^{1/3}$, utilize a linha de corte formada pelo semi-eixo positivo dos x: $x \in [0,\infty)$, representada em linha grossa na figura.
- O resíduo de

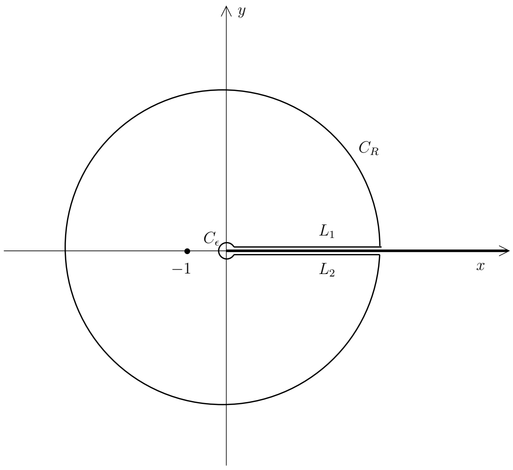
$$f(z) = \frac{z^{1/3}}{(z+1)^2}$$

em $z=-1$ é $e^{-2\pi i/3}/3$.

1,0 Mostre que as integrais sobre os círculos C_R e C_ϵ indicados na figura, cujos raios são respectivamente R e ϵ, tendem a zero quando $R\to\infty$ e $\epsilon\to 0$.

1,0 Calcule as integrais de $f(z)$ sobre L_1 e L_2 (percorrendo o contorno no sentido anti-horário).

2,0 Junte tudo, e mostre que a integral pedida vale $2\pi/(3\sqrt{3})$.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A linha de corte indicada limita o argumento de $z = re^{i\theta}$ a $0 \le \theta < 2\pi$. Sobre $z = Re^{i\theta}$, $dz = iRe^{i\theta}$, e

$$\int_{C_R} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{(Re^{i\theta})^{1/3}}{(Re^{i\theta}+1)^2} iRe^{i\theta}\,d\theta.$$

Para $R\to\infty$,

$$\int_{C_R} f(z)\,dz \sim \int_0^{2\pi} ie^{i\theta(1/3+1-2)}R^{1/3+1-2}\,d\theta \to 0.$$

Sobre $z = \epsilon e^{i\theta}$,

$$\int_{C_\epsilon} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{(\epsilon e^{i\theta})^{1/3}}{(\epsilon e^{i\theta}+1)^2} i\epsilon e^{i\theta}\,d\theta.$$

Para $\epsilon \to 0$,

$$\int_{C_\epsilon} f(z)\,dz \sim \int_0^{2\pi} ie^{i\theta(1/3+1)}\epsilon^{1/3+1}\,d\theta \to 0.$$

Agora, pelo Teorema dos Resíduos,

$$\int_{C_R} + \int_{C_\epsilon} + \int_{L_1} + \int_{L_2} = 2\pi i c_{-1},$$

Continue a solução no verso ⟹

onde $c_{-1} = e^{-2\pi i/3}/3$ é o resíduo de $f(z)$ em -1. Mas:

$$\begin{aligned}
&\text{em } L_1 \text{:} z = x,\\
&\text{em } L_2 \text{:} z = xe^{2\pi i}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{L_1} &= \int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{(x+1)^2}\, dx,\\
\int_{L_2} &= \int_\infty^0 \frac{(xe^{2\pi i})^{1/3}}{(xe^{2\pi i}+1)^2}\, d(xe^{2\pi i})\\
&= -e^{2\pi i/3} \int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{(x+1)^2}\, dx.
\end{aligned}$$

Note que $x = xe^{2\pi i}$, e que só há diferença no termo $z^{1/3}$. Juntando tudo,

$$\begin{aligned}
\left(1 - e^{2\pi i/3}\right) \int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{(x+1)^2}\, dx &= \frac{2\pi i}{3} e^{-2\pi i/3},\\
\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{(x+1)^2}\, dx &= \frac{2\pi i}{3} \frac{1}{e^{2\pi i/3} - e^{4\pi i/3}}\\
&= \frac{2\pi i}{3} \frac{1}{(-1/2 + i\sqrt{3}/2) - (-1/2 - i\sqrt{3}/2)}\\
&= \frac{2\pi i}{3} \frac{1}{i\sqrt{3}}\\
&= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [2,0] Calcule a transformada de Laplace da Distribuição Delta de Dirac em torno de $t = a$,

$$\mathscr{L}[\delta(t-a)] = \int_0^\infty \delta(t-a)e^{-st}\,dt,$$

onde $a > 0$. Para fazer isto, você vai precisar mudar o limite inferior da integral para $-\infty$. **Explique** por que você pode fazer isto sem alterar o resultado da integral.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Começo explicando: como a δ atua em $a > 0$, o limite inferior é irrelevante, desde que menor que a; portanto,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[\delta(t-a)] &= \int_{-\infty}^\infty \delta(t-a)e^{-st}\,dt \\ &= e^{-sa}.\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$