TT009 Matemática Aplicada II
P01, 19 Set 2003
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

Escrevendo vetores Você deve prestar particular atenção à *notação vetorial*: nos livros, os vetores em geral são indicados em negrito; assim, por exemplo, imprime-se $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$ para indicar três vetores unitários da base canônica, ou

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

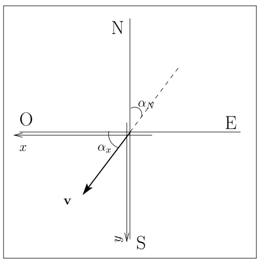
para indicar o produto vetorial de dois vetores. É claro, entretanto, que não é muito prático produzir letras em negrito manuscritas (embora eu já tenha visto alunos fazerem isto!); então, quando você estiver escrevendo à mão, você deve deixar claro que o símbolo em questão é um vetor. Isto pode ser feito de duas maneiras (há outras, mas estas duas são as mais populares):

1. Com uma seta sobre a letra: $\vec{\imath}$ ou $\vec{a}$. Esta é a forma mais comum entre os físicos.
2. Com um til *sob* a letra: $\underset{\sim}{i}$, ou $\underset{\sim}{a}$. Esta é a forma mais popular entre os engenheiros, e é a minha preferida.

Infelizmente, muitos alunos ainda não se acostumaram a indicar claramente vetores. Isto pode ser catastrófico, principalmente porque os *produtos* entre vetores são muito diferentes do produto de dois escalares. Por exemplo, o lado esquerdo da desigualdade abaixo é um produto escalar, enquanto que o lado direto é um produto de dois escalares:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \neq ab = a \cdot b.$$

Assim, para estimular os alunos de Matemática Aplicada II a escreverem corretamente seus vetores, *todas* as provas conterão questões sobre, ou envolvendo, notação vetorial. O uso incorreto de notação vetorial acarretará a perda total dos pontos da questão.



1 [2,0] Um *anemômetro sônico* é um aparelho capaz de medir as 3 componentes u, v e w da velocidade do vento. Na figura ao lado, mediu-se um vetor velocidade do vento totalmente horizontal ($w = 0$), com módulo igual a $5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ e *ângulo azimutal* (o azimute é o ângulo em relação ao norte) $\alpha_N = 30°$. Escreva o vetor velocidade do vento $\boldsymbol{v}$ em relação ao sistema de coordenadas mostrado na figura.

SOLUÇÃO DA 1ª Questão:

Note que o eixo y está de cabeça para baixo, e que x aponta para a esquerda; portanto, o ângulo α_x que o vetor velocidade do vento $\boldsymbol{v}$ faz om Ox é *positivo*, donde

$$u = |\boldsymbol{v}| \cos 30° = 5\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{ms^{-1}}, \tag{1}$$

$$v = |\boldsymbol{v}| \operatorname{sen} 30° = 5\frac{1}{2}\,\mathrm{ms^{-1}}. \tag{2}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

ou

$$\boldsymbol{v} = \frac{5\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{5}{2}\boldsymbol{j}.$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [8,0] A função densidade de probabilidade da distribuição gama é

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta\Gamma(\alpha)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}.$$

Usando os fatos:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt,$$
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

mostre, com todo o nível de detalhe necessário, que

a) [4,0] $\langle X \rangle = \alpha\beta$,

b) [4,0] $\left\langle (X - \langle X \rangle)^2 \right\rangle = \alpha\beta^2$.

SOLUÇÃO DA 2ª Questão:

Solução de a):

$$\langle X \rangle = \int_0^\infty x \frac{1}{\beta\Gamma(\alpha)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}\, dx = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha} e^{-\frac{x}{\beta}}\, d\left(\frac{x}{\beta}\right).$$
$$t = \frac{x}{\beta} \Rightarrow$$
$$\langle X \rangle = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^\alpha e^{-t}\, dt = \beta \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}.$$

mas

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \Rightarrow \langle X \rangle = \beta\frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha\beta \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Solução de b):

$$
\begin{aligned}
\left\langle (X-\langle X\rangle)^2 \right\rangle &= \int_0^\infty (x-\alpha\beta)^2 \frac{1}{\beta\Gamma(\alpha)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}\,dx \\
&= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left[\left(\frac{x}{\beta}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{\beta}\right)^2 + \frac{\alpha^2\beta^2}{\beta^2}\right] \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}\,d\left(\frac{x}{\beta}\right) \\
&= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \int_0^\infty t^{\alpha+1}e^{-t}\,dt - 2\alpha\int_0^\infty t^{\alpha}e^{-t}\,dt + \alpha^2\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt \right\} \\
&= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \Gamma(\alpha+2) - 2\alpha\Gamma(\alpha+1) + \alpha^2\Gamma(\alpha) \right\} \\
&= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \left\{ (\alpha+1)\Gamma(\alpha+1) - 2\alpha\Gamma(\alpha+1) + \alpha^2\Gamma(\alpha) \right\} \\
&= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \Gamma(\alpha+1) + \alpha\Gamma(\alpha+1) - 2\alpha\Gamma(\alpha+1) + \alpha^2\Gamma(\alpha) \right\} \\
&= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \Gamma(\alpha+1) - \alpha\Gamma(\alpha+1) + \alpha^2\Gamma(\alpha) \right\} \\
&= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \alpha\Gamma(\alpha) - \alpha^2\Gamma(\alpha) + \alpha^2\Gamma(\alpha) \right\} \\
&= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}\alpha\Gamma(\alpha) = \alpha\beta^2 \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada II
P02, 26 Set 2003
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ______________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

Não se esqueça da notação de vetores:

1. com uma seta sobre a letra: $\vec{\imath}$ ou $\vec{a}$ (esta é a forma mais comum entre os físicos) ou
2. com um til *sob* a letra: $\underset{\sim}{i}$, ou $\underset{\sim}{a}$ (esta é a forma mais popular entre os engenheiros, e é a minha preferida),

e garanta seus pontos nas questões †

1 [2,0] Mostre que

$$\mathrm{Cov}\{X, Y\} = \langle XY \rangle - \langle X \rangle \langle Y \rangle .$$

SOLUÇÃO DA 1ª Questão:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\{X, Y\} &= \langle (X - \langle X \rangle)(Y - \langle Y \rangle) \rangle \\
&= \langle XY - X \langle Y \rangle - Y \langle X \rangle + \langle X \rangle \langle Y \rangle \rangle \\
&= \langle XY \rangle - \langle X \rangle \langle Y \rangle - \langle Y \rangle \langle X \rangle + \langle X \rangle \langle Y \rangle \\
&= \langle XY \rangle - \langle X \rangle \langle Y \rangle \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [3,0] Considere o problema de ajustar uma reta passando pela origem a uma nuvem de pontos (x_i, y_i); como você sabe, os pontos experimentais não caem todos exatamente sobre uma reta. Nós desejamos portanto a reta

$$\hat{y} = ax \tag{1}$$

que passe *em média* pela nuvem, e seja, em algum sentido, ótima. Uma alternativa é a reta de mínimos quadrados, obtida minimizando-se a função

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (ax_i - y_i)^2. \end{aligned}$$

a) [2,0] Derive Q em relação a a, iguale a zero, e mostre que a estimativa de mínimos quadrados de a é

$$a = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{x_i}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}}_{c_i} y_i = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i.$$

b) [1,0] Se $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ são dois vetores de $\mathbb{R}^n$, escreva a em função dos produtos escalares $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$ e $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x})$.

SOLUÇÃO DA 2ª Questão:

a)

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial a} &= \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i - y_i)x_i = 0. \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i &= 0 \\ a &= \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \blacksquare \end{aligned}$$

b)

$$a = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [5,0] Uma maneira de modelar a dispersão dos pontos em torno da reta $y = ax$ é a seguinte: a cada x_i, nós introduzimos um erro aleatório W_i, de valor esperado nulo e variância σ^2, na observação de y_i, segundo

$$Y_i = ax_i + W_i. \tag{2}$$

Note que x_i *não* é uma variável aleatória: a aleatoriedade de Y é devida unica e exclusivamente a W. Naturalmente, nós vamos supor que os W_i's, $i = 1, \ldots, n$, são iid. Resumindo:

$$\begin{aligned}\langle W_i \rangle &= 0,\\ \mathrm{Var}\{W_i\} &= \langle W_i^2 \rangle = \sigma^2,\\ \mathrm{Cov}\{W_i, W_j\} &= \langle W_i W_j \rangle = 0.\end{aligned}$$

A cada novo sorteio de n pontos, obtém-se um valor diferente para a; nós dizemos que o estimador de a é a variável aleatória

$$A = \sum_{i=1}^{n} c_i Y_i, \quad c_i = \frac{x_i}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

(note que os c_i's, que só dependem dos x_i's, também não são variáveis aleatórias, mas sim constantes).

a) [0,5] (*Fácil*) Mostre que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 1.$$

b) [1,0] (*Fácil*) Mostre que

$$\mathrm{Var}\{Y_i\} = \sigma^2.$$

c) [1,0] (*Fácil*) Mostre que

$$\langle A \rangle = a,$$

ou seja: A é um estimador *não-tendencioso* de a.

d) [2,5] (*Difícil*) A variância de A é

$$\left\langle [A-a]^2 \right\rangle = \left\langle \left[\left(\sum_{i=1}^{n} c_i Y_i \right) - a \right]^2 \right\rangle = \left\langle \left[\left(\sum_{i=1}^{n} c_i Y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \right) a \right]^2 \right\rangle = \ldots = \frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

Preencha cuidadosamente ... com todos os passos necessários para chegar ao resultado final. Você vai precisar da fórmula do quadrado de um multinômio:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} z_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} z_i z_j.$$

SOLUÇÃO DA 3ª Questão:

a)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} c_i x_i &= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{x_i}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \right] x_i\\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = 1 \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

b)

$$\mathrm{Var}\{Y_i\} = \mathrm{Var}\{ax_i + W_i\} = \mathrm{Var}\{W_i\} = \sigma^2 \blacksquare$$

c)

$$\langle A \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i Y_i \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i (ax_i + W_i) \right\rangle = \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i}_{=1} \right) a + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\langle W_i \rangle}_{=0} = a \blacksquare$$

d)

$$\begin{aligned}
\left\langle [A-a]^2 \right\rangle &= \left\langle \left[\left(\sum_{i=1}^{n} c_i Y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^{n} c_i a x_i \right) \right]^2 \right\rangle \\
&= \left\langle \left[\sum_{i=1}^{n} (c_i Y_i - c_i a x_i) \right]^2 \right\rangle \\
&= \left\langle \left[\sum_{i=1}^{n} c_i \left(Y_i - a x_i \right) \right]^2 \right\rangle \\
&= \left\langle \left[\sum_{i=1}^{n} c_i W_i \right]^2 \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i^2 W_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} c_i c_j W_i W_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \left\langle W_i^2 \right\rangle + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} c_i c_j \underbrace{\langle W_i W_j \rangle}_{=0} \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \sigma^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \right)^2 \sigma^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^2} \sigma^2 \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^2} \sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada II
P03, 03 Out 2003
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

Não se esqueça da notação de vetores:

1. com uma seta sobre a letra: $\vec{\imath}$ ou $\vec{a}$ (esta é a forma mais comum entre os físicos) ou
2. com um til *sob* a letra: $\underset{\sim}{i}$, ou $\underset{\sim}{a}$ (esta é a forma mais popular entre os engenheiros, e é a minha preferida),

e garanta seus pontos nas questões ✝

1 [2,0] Se $\boldsymbol{u} = (0, 3, 2)$, $\boldsymbol{v} = 1, 3, 4$ e $\boldsymbol{w} = (2, 2, 2)$, mostre que $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ são linearmente independentes.

SOLUÇÃO DA 1ª Questão:

O produto triplo de $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ é o determinante (igual ao volume do prisma definido pelos 3 vetores)

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 10.$$

Como o determinante não é nulo, os 3 vetores são LI ■

Continue a solução no verso ⟹

2 [8,0] Se $Y = \ln X$, e Y possui uma distribuição normal com média μ e desvio-padrão σ,

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\right],$$

a) [3,0] Mostre que a função densidade de probabilidade (log-normal) de X é

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2\right].$$

b) [5,0] Dado o vetor $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de n amostras iid de uma distribuição log-normal , encontre os estimadores de máxima verossimilhança de μ e σ em função de $\boldsymbol{x}$.

SOLUÇÃO DA 2ª Questão:

a) Como $\ln x$ é uma função biunívoca, posso fazer

$$\begin{aligned} f_X(x)\,dx &= f_Y(y)\,dy \\ f_X(x) &= f_Y(y)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} f_Y(y(x)) \\ &= \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \blacksquare \end{aligned}$$

b) O log da função de verossimilhança é

$$\begin{aligned} \ln L &= \ln \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i) \\ &= \ln \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\ln\frac{1}{x_i} + \ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} - \frac{1}{2}\left(\frac{\ln x_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[-\ln x_i - \ln\sqrt{2\pi} - \ln\sigma - \frac{1}{2}\left(\frac{\ln x_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \\ &= -\left[\sum_{i=1}^{n}\ln x_i + n\ln\sqrt{2\pi} + n\ln\sigma + \frac{1}{2}\sigma^{-2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2\right] \blacksquare \end{aligned}$$

Igualando-se as derivadas da função de log-verossimilhança em relação a μ e σ a zero,

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \sigma^{-2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - \mu) = 0 \qquad \Rightarrow \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} &= -\left[\frac{n}{\sigma} - \sigma^{-3}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2\right] \\ &= -\frac{1}{\sigma^3}\left[n\sigma^2 - \sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2\right] = 0 \qquad \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2 \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada II
P05, 24 Out 2003
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ______________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

Não se esqueça da notação de vetores:

1. com uma seta sobre a letra: $\vec{\imath}$ ou $\vec{a}$ (esta é a forma mais comum entre os físicos) ou
2. com um til *sob* a letra: $\underset{\sim}{i}$, ou $\underset{\sim}{a}$ (esta é a forma mais popular entre os engenheiros, e é a minha preferida),

e garanta seus pontos nas questões ☨

1 [4,0] Matematildo, um aluno do Curso de Engenharia Ambiental metido a conhecer matemática, resolveu uma questão de prova envolvendo polinômios de Legendre usando, para o polinômio de grau n, a notação $\vec{P}_n(x)$. Interrogado pelo professor sobre o motivo desta notação, ele respondeu: "Elementar, meu caro professor: os polinômios de Legendre são vetores — e ainda por cima ortogonais!". Explique por que Matematildo tem razão.

SOLUÇÃO DA 1ª Questão:

Funções reais em um intervalo $[a, b]$ (no caso, $[-1, +1]$) podem ser consideradas vetores: a função identicamente nula no intervalo faz o papel do vetor $\mathbf{0}$; a soma de duas funções é novamente uma função, e o produto de uma função por um escalar é novamente uma função. Em suma, os 8 axiomas clássicos de álgebra linear para um espaço vetorial são atendididos para funções (contínuas, ou contínuas por partes, ou quadrado-integráveis, etc.) definidas em um intervalo. Portanto, funções em geral, e os polinômios de Legendre em particular, podem ser interpretados como vetores.

Além, disso, pode ser demonstrado (veja Butkhov, p. 350 e seguintes) que os polinômios de Legendre atendem à condição de ortogonalidade,

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_m(x)\,dx = 0, \quad (l \neq m).$$

Assim, os polinômios de Legendre são vetores ortogonais.

Continue a solução no verso ⟹

2 [6,0] Obtenha os cinco primeiros polinômios de Legendre usando explicitamente a fórmula de Rodrigues,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n}.$$

SOLUÇÃO DA 2ª Questão:

Esta é uma questão de aplicação direta de fórmula:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1,\\
P_1(x) &= x,\\
P_2(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2},\\
P_3(x) &= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x,\\
P_4(x) &= \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada II
P06, 07 Nov 2003
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ______________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

Não se esqueça da notação de vetores:

1. com uma seta sobre a letra: $\vec{\imath}$ ou $\vec{a}$ (esta é a forma mais comum entre os físicos) ou
2. com um til *sob* a letra: $\underset{\sim}{i}$, ou $\underset{\sim}{a}$ (esta é a forma mais popular entre os engenheiros, e é a minha preferida),

e garanta seus pontos nas questões ☨

1 [3,0] Considere a lei de Darcy para escoamento em um meio poroso saturado, na forma

$$\boldsymbol{v} = -k\boldsymbol{\nabla} h$$

onde k é a condutividade hidráulica saturada, e h a altura do lençol freático. Mostre que, se h só depender de coordenadas horizontais (por exemplo: se, em coordenadas cartesianas, só depender de x e y), então $\boldsymbol{v}$ é um vetor *horizontal*. Esta é a *hipótese de Dupuit-Forchheimer*.

SOLUÇÃO DA 1ª Questão:

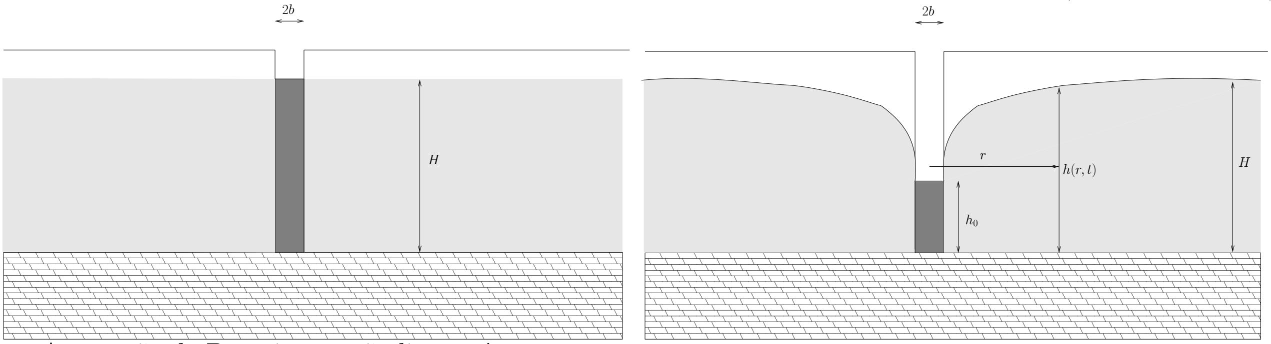
Suponha $h = h(x, y)$; então,

$$\boldsymbol{v} = -k\boldsymbol{\nabla} h = -k\left[\frac{\partial h}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial h}{\partial y}\boldsymbol{j}\right].$$

Como a componente $\boldsymbol{k}$ de $\boldsymbol{v}$ é nula, $\boldsymbol{v}$ é um vetor horizontal.

Continue a solução no verso ⟹

2 [4,0] A figura abaixo mostra um poço cilíndrico de diâmetro $2b$ com o nível d'água em seu interior inicialmente igual à altura H do lençol freático (figura da esquerda). Uma bomba entra em ação quase instantaneamente, baixando o nível do poço para h_0, e mantendo-o neste nível (figura da direita).



A equação de Boussinesq, não-linear, é

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{n}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[rh\frac{\partial h}{\partial r}\right],$$

onde k é a condutividade hidráulica saturada, n é a porosidade e r é a distância radial.

a) [1,0] Mostre como a equação de Boussinesq pode ser linearizada.

b) [1,0] Defina as *condições iniciais* do problema, $h(r, 0)$.

c) [1,0] Defina as *condições de contorno* do problema, $h(b, t)$ e $h(\infty, t)$.

d) [1,0] Tente encontrar $h(r, \infty)$ simplesmente resolvendo a equação diferencial *ordinária* obtida a partir da equação de Boussinesq fazendo $\partial h/\partial t = 0$, e impondo condições de contorno adequadas. Isto só pode ser feito a partir da equação **não-**linear, e não da equação linearizada! **Prove esta última afirmação, e ganhe um bônus de 2 pontos, podendo tirar até 12 nesta prova!**

SOLUÇÃO DA 2ª Questão:

---

a) A linearização da equação de Boussinesq consiste, simplesmente, em usar um valor médio de h (digamos: $\overline{h}$) dentro do colchete. Ela se torna então:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k\overline{h}}{n}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial h}{\partial r}\right],$$

que é a equação da difusão em coordenadas polares.

b)

$$h(r, 0) = H$$

c)

$$h(b, t) = h_0, \quad (1)$$
$$h(\infty, t) = H. \quad (2)$$

Continue a solução no verso ⟹

d) **Obs.: havia um erro tipográfico no enunciado, pela ausência da palavra *não*, indicada em negrito no enunciado corrigido acima.** A integração da equação não-linear produz

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\left(rh\frac{dh}{dr}\right) &= 0,\\
rh\frac{dh}{dr} &= A,\\
A\frac{dr}{r} &= hdh,\\
A\int_b^r \frac{d\rho}{\rho} &= \int_{h_0}^h \eta\, d\eta,\\
A\ln\frac{r}{b} &= \frac{h^2-h_0^2}{2}.
\end{aligned}
$$

A integração da equação linearizada produz

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\left(r\frac{dh}{dr}\right) &= 0,\\
r\frac{dh}{dr} &= A',\\
A'\frac{dr}{r} &= dh,\\
A'\int_b^r \frac{d\rho}{\rho} &= A'\int_{h_0}^h d\eta,\\
h-h_0 &= A'\ln\frac{r}{b}.
\end{aligned}
$$

Na verdade, o enunciado está mal feito, e é impossível, em ambos os casos, atender à condição de contorno $h(r=\infty)=H$. Por este motivo, eu anulei este item, e dei o seu valor integral (1,0) para todos os alunos.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [3,0] Considere a forma bilinear

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 = 1.$$

a) [1,0] Ache a matriz M tal que a equação acima pode ser escrita na forma

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot M \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1.$$

b) [1,0] Mostre que os autovalores de M são 1 e 6.

c) [1,0] Tente obter a transformação $(x, y) \to (x', y')$ que leva a uma forma diagonal.

SOLUÇÃO DA 3ª Questão:

---

a) Por inspeção, a matriz M é

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix},$$

de tal forma que

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2x + 2y \\ 2x + 5y \end{bmatrix} = 2x^2 + 2xy + 2xy + 5y^2 = 2x^2 + 4xy + 5y^2.$$

b) Os auto-valores são obtidos a partir de

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2 - \lambda)(5 - \lambda) - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 6 \text{ ou } \lambda = 1.$$

c) Os autovetores *normalizados* são, respectivamente:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2), \\ \boldsymbol{e}_2 &= \frac{2}{\sqrt{5}}(1, -\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Se $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$ são as coordenadas de um vetor na base canônica, e $\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}^T$ são as coordenadas do mesmo vetor na base dos autovetores (normalizados), então vale

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y', \\ y &= \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y'. \end{aligned}$$

Substituindo na forma bilinear,

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 = 6(x')^2 + (y')^2 = 1.$$

Em retrospecto, este item necessita de uma boa dose de memória do curso de álgebra linear. Todos os alunos ganharam o ponto do item c); aqueles que o acertaram, ganharam um bônus de mais um ponto.

Continue a solução no verso ⟹

TT009 Matemática Aplicada II
P08, 28 Nov 2003
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

Não se esqueça da notação de vetores:

1. com uma seta sobre a letra: $\vec{\imath}$ ou $\vec{a}$ (esta é a forma mais comum entre os físicos) ou
2. com um til *sob* a letra: $\underset{\sim}{i}$, ou $\underset{\sim}{a}$ (esta é a forma mais popular entre os engenheiros, e é a minha preferida),

e garanta seus pontos nas questões ☨

1 [2,0] A partir das seguintes propriedades do produto interno,

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})^*,\\
(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}) &= \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),
\end{aligned}
$$

mostre que

$$
(\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).
$$

SOLUÇÃO DA 1ª Questão:

$$
(\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = [(\boldsymbol{y}, \alpha\boldsymbol{x})]^* = [\alpha(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})]^* = \alpha^*(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})^* = \alpha^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [4,0] A dedução da desigualdade de Schwarz abaixo, igual à que eu dei em sala, está **errada**!

$$
\begin{aligned}
0 \le & \left(\boldsymbol{x} - \frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})}\boldsymbol{y} \right) = \\
& \left(\boldsymbol{x} - \frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \right) - \left(\boldsymbol{x} - \frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})}\boldsymbol{y}, \frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})}\boldsymbol{y} \right) = \\
& \left[\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} - \frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})}\boldsymbol{y} \right) \right]^* - \left[\left(\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})}\boldsymbol{y} \right) \right]^* = \\
& \left[(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) - \frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})} \right]^* - \left[\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})} - \frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})} \right]^* = \\
& (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})^*(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})^* - (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^* - (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^*(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})^* + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^* = \\
& \|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2.
\end{aligned}
$$

O erro foi introduzido no 2º colchete da 4ªlinha, e tem a ver com a aplicação errada da propriedade deduzida na 1ªquestão. Conserte o erro e obtenha um novo resultado: você ainda consegue provar a desigualdade de Schwarz? (Veja também a próxima questão, para uma dica adicional)

SOLUÇÃO DA 2ª Questão:

Faça

$$
\alpha = -\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})},
$$

e re-escreva a 3ªlinha:

$$
\begin{aligned}
0 \le & [(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y})]^* + [(\alpha\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y})]^* = \\
& [(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + \alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]^* + [\alpha^*(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) + \alpha^*\alpha(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})]^* = \\
& (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})^* + \alpha^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^* + \alpha(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})^* + \alpha\alpha^*(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})^* = \\
& (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + \alpha^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^* + \alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \alpha\alpha^*(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}).
\end{aligned}
$$

Multiplicando por $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})$ e substituindo o valor de α,

$$
\begin{aligned}
0 \le & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^* - (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^* = \\
& \|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - 2\Re(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2,
\end{aligned}
$$

que **não é** a desigualdade de Schwarz.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [4,0] Uma forma mais limpa de deduzir a desigualdade de Schwarz é

$$\begin{aligned}
0 \leq\ & (\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \alpha \boldsymbol{y}) = \\
& (\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + \alpha(\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = \\
& [(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{y})]^* + \alpha[(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{y})]^* = \\
& [(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})]^* + \alpha[(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + \alpha(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})]^* = \\
& (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})^* + \alpha^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^* + \alpha(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})^* + \alpha\alpha^*(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})^*.
\end{aligned}$$

Agora faça

$$\alpha = -\frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^*}{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})}$$

e conclua a dedução **correta** da desigualdade de Schwarz.

SOLUÇÃO DA 3ª Questão:

Primeiro multiplico a última linha por $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})^*(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) + \alpha^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^*(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) + \alpha(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})^*(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) + \alpha\alpha^*(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})^*(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y});$$

em seguida, substituo o valor de α (**note que o α desta questão é o conjugado complexo do α da 2ªquestão**):

$$\begin{aligned}
0 \leq & (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^* - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^*(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})^* + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \\
& (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \\
& (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \\
& \|\boldsymbol{x}\|^2 \|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|^2.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada II
P09, 05 Dez 2003
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ______________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

Não se esqueça da notação de vetores:

1. com uma seta sobre a letra: $\vec{\imath}$ ou $\vec{a}$ (esta é a forma mais comum entre os físicos) ou
2. com um til *sob* a letra: $\underset{\sim}{i}$, ou $\underset{\sim}{a}$ (esta é a forma mais popular entre os engenheiros, e é a minha preferida),

e garanta seus pontos nas questões †

1 [3,0]

a) [1,0] Defina o que é o operador adjunto $L^\dagger$ de um operador linear L em um espaço vetorial $\mathbb{V}$,

$$\begin{aligned} L : \mathbb{V} &\to \mathbb{V} \\ \boldsymbol{x} &\mapsto \boldsymbol{y} = L(\boldsymbol{x}), \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{V}$.

b) [2,0] Certo ou errado?

Dado um L, para cada novo produto interno $(\cdot,\cdot)$ definido em $\mathbb{V}$, $L^\dagger$ será diferente.

Justifique sua resposta.

SOLUÇÃO DA 1ª Questão:

Certo: se

$$(L^\dagger \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \equiv (\boldsymbol{x}, L\boldsymbol{y}),$$

então está claro que $L^\dagger$ é definido tanto por L quanto pelo produto interno.

Continue a solução no verso ⟹

2 [7,0] Considere o problema de valor inicial

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{T+t}u = f(t),$$
$$u(0) = 0,$$

onde T é uma constante. Obtenha a função de Green $G(t,\tau)$ associada.

SOLUÇÃO DA 2ª Questão:

$$\int_0^\infty \left[G\frac{du}{d\tau} + G\frac{1}{T+\tau}u\right] d\tau = \int_0^\infty Gf(\tau)\,d\tau.$$

$$G(t,\tau)u(\tau)\Big|_{\tau=0}^{\infty} + \int_0^\infty \left[-u\frac{dG}{d\tau} + G(t,\tau)\frac{1}{T+\tau}u(\tau)\right] d\tau = \int_0^\infty G(t,\tau)f(\tau)\,d\tau$$

$$G(t,\infty)u(\infty) + \int_0^\infty \left[-\frac{dG}{d\tau} + \frac{1}{T+\tau}G\right] u(\tau)\,d\tau = \int_0^\infty G(t,\tau)f(\tau)\,d\tau.$$

O problema adjunto é

$$-\frac{dG}{d\tau} + \frac{1}{T+\tau}G = \delta(\tau - t)$$

$$G(t,\tau) = [1 - H(\tau - t)]g(t,\tau) \quad \text{(esta tentativa atende a } G(t,\infty) = 0\text{)}$$

Tento resolver

$$-\frac{dg}{d\tau} + \frac{g}{T+\tau} = 0, \quad \text{com } g(t,t) = 1:$$

$$\frac{dg}{g} = \frac{d\tau}{T+\tau}$$

$$\ln g = \ln(T+\tau) + \ln g_0$$

$$g = g_0(T+\tau)$$

$$\text{para que: } g(t,t) = 1 \;\Rightarrow\; g_0 = \frac{1}{T+t}$$

$$G(t,\tau) = [1 - H(\tau - t)]\frac{T+\tau}{T+t}.$$

Continue a solução no verso ⟹

TT010 Matemática Aplicada II
P10, 12 Dez 2003
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ______________________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

Não se esqueça da notação de vetores:

1. com uma seta sobre a letra: $\vec{\imath}$ ou $\vec{a}$ (esta é a forma mais comum entre os físicos) ou

2. com um til *sob* a letra: $\underset{\sim}{i}$, ou $\underset{\sim}{a}$ (esta é a forma mais popular entre os engenheiros, e é a minha preferida),

e garanta seus pontos nas questões †

1 [10,0] Hengenrique Ambientaldo é um Engenheiro Ambiental da UFPR.
Ele foi chamado para estudar um caso de um lançamento acidental de uma substância tóxica em um rio.
A concentração desta mesma substância foi medida em uma seção do rio alguns quilômetros a jusante.
O intervalo de discretização do problema é de uma hora.
O despejo da substância tóxica durou 4 horas.
A tabela que registra o lançamento da substância no rio ao longo do tempo é a seguinte:

hora	1	2	3	4	5	6	7
lançamento (ton.)	1	1	1	1	0	0	0

A nuvem tóxica demorou 7 horas para passar pela seção de jusante.
A tabela que registra a passagem da nuvem tóxica na seção de jusante ao longo do tempo é a seguinte:

hora	1	2	3	4	5	6	7
concentração (mg/l)	0.50	0.75	0.90	1.00	0.50	0.25	0.10

Hengenrique precisa desenvolver rapidamente um modelo para prever o efeito de futuros lançamentos acidentais.

Hengenrique decidiu que uma boa maneira de fazer isto é encontrar uma função de resposta unitária (ou seja: a função de Green) do "sistema" rio entre o ponto de lançamento e a seção de interesse.

Para encontrar a função de Green, Hengenrique montou uma tabela como se segue:

lançamento (ton.)	1	1	1	1	0	0	0
hora 1:	G_1	G_2	G_3	G_4	0	0	0
hora 2:	0	G_1	G_2	G_3	G_4	0	0
hora 3:	0	0	G_1	G_2	G_3	G_4	0
hora 4:	0	0	0	G_1	G_2	G_3	G_4
concentração (mg/l)	0.5	0.75	0.90	1.00	0.50	0.25	0.10

Prossiga com o raciocínio (brilhante) de Hengenrique, e obtenha a função de Green discreta G_1, G_2, G_3, G_4 onde: G_1 é a resposta do sistema a um estímulo unitário durante a hora 1; G_2 é a resposta do sistema a um estímulo unitário durante a hora 2; G_3 é a resposta do sistema a um estímulo unitário durante a hora 3, e G_4 é a resposta do sistema a um estímulo unitário durante a hora 4.

Observação: as unidades deste problema (toneladas, e mg/l), são apenas para dar um mínimo de realismo ao enunciado, e não têm maior significado na solução do problema.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada II
P11, 26 Jan 2003
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

O movimento browniano de uma partícula em um fluido é dado por um processo estocástico $X(t, \omega)$, onde ω indica a partícula em questão (ou seja: cada partícula "vem" de um ω, e representa uma realização $x(t)$, diferente. As questões a seguir referem-se a este problema.

1 [3,0] Explique **em poucas palavras** o significado físico dos símbolos, e da equação como um todo, para cada uma das equações abaixo:

$$F_R = -6\pi\mu a \frac{dX}{dt},$$
$$\left\langle \frac{mV^2}{2} \right\rangle = \frac{kT}{2}.$$

F_R é a força de resistência do fluido cuja viscosidade dinâmica é μ ao movimento de uma partícula de diâmetro a e massa m. X é a posição da partícula.

$$V = \frac{dX}{dt}$$

é a velocidade da partícula, k é a constante de Boltzmann e T é a temperatura do fluido.

A primeira equação é simplesmente a 2ª lei de Newton aplicada ao movimento de uma partícula.

A segunda equação diz que a velocidade média quadrática das partículas é proporcional à temperatura do sistema, ou seja: que na média quadrática as partículas possuem a mesma velocidade das moléculas do fluido.

2 [3,0] Sabendo que em um processo estocástico estacionário os momentos são independentes do tempo, e que

$$\left\langle X^2(t, \omega) \right\rangle = 2Dt,$$

onde D é o coeficiente de difusão, o que você conclui sobre a estacionariedade (ou não) de $X(t, \omega)$?

X é não estacionário, já que $\left\langle X^2 \right\rangle$ varia com o tempo (cresce linearmente com t).

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [4,0] No movimento browniano, tanto a posição $X(t)$ quanto a velocidade dX/dt possuem valor esperado nulo, isto é:

$$\langle X(t) \rangle = 0,$$
$$\left\langle \frac{dX}{dt} \right\rangle = 0.$$

Utilize agora os conceitos de independência e covariância de duas variáveis aleatórias, derive em relação ao tempo a expressão

$$\left\langle X^2(t,\omega) \right\rangle = 2Dt,$$

e responda à questão:

X e dX/dt são variáveis aleatórias independentes?

(Naturalmente, não basta responder sim/não: é preciso justificar matematicamente sua resposta.)

Derivando-se a expressão dada,

$$\frac{d}{dt}\left\langle X^2(t,\omega) \right\rangle = 2\left\langle X\frac{dX}{dt} \right\rangle = 2D \neq 0.$$

Por outro lado, se X e dX/dt forem independentes, então (necessariamente)

$$\operatorname{Cov}\left\{X, \frac{dX}{dt}\right\} = \left\langle \left(X - \langle X \rangle\right)\left(\frac{dX}{dt} - \left\langle \frac{dX}{dt} \right\rangle\right) \right\rangle = 0$$

Como $\langle X \rangle = 0$ e $\langle dX/dt \rangle = 0$, isto reduz-se a

$$X \text{ independente de } \frac{dX}{dt} \Rightarrow \operatorname{Cov}\left\{X, \frac{dX}{dt}\right\} = \left\langle X\frac{dX}{dt} \right\rangle = 0.$$

Portanto, como $\langle X dX/dt \rangle \neq 0$, X e dX/dt **não são independentes**.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada II
P12, 02 Fev 2004
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

Considere os seguintes dados do ácido fosfórico levemente diluído em água (H_3PO_4 a 80%):

Corrosivo	sim
Risco de lesão à pele	sim
Concentração imediatamente perigosa para a vida	$1000\ \mathrm{mg\,m^{-3}}$
densidade	$1625\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$

Um caminhão derrubou 1000 litros de ácido fosfórico, H_3PO_4 a 80%, em um rio com as seguintes características:

Largura da seção transversal	10 m
Profundidade	1 m
Velocidade média $\overline{u}$	$1\mathrm{m\,s^{-1}}$
σ_u	$1\mathrm{m\,s^{-1}}$
Escala integral lagrangeana	$\mathcal{T} = 10\,\mathrm{s}$

1 [4,0] Sabendo que $\left\langle X^2(t)\right\rangle = 2Dt = 2C(0)\mathcal{T}t$, calcule o coeficiente de difusão longitudinal D.

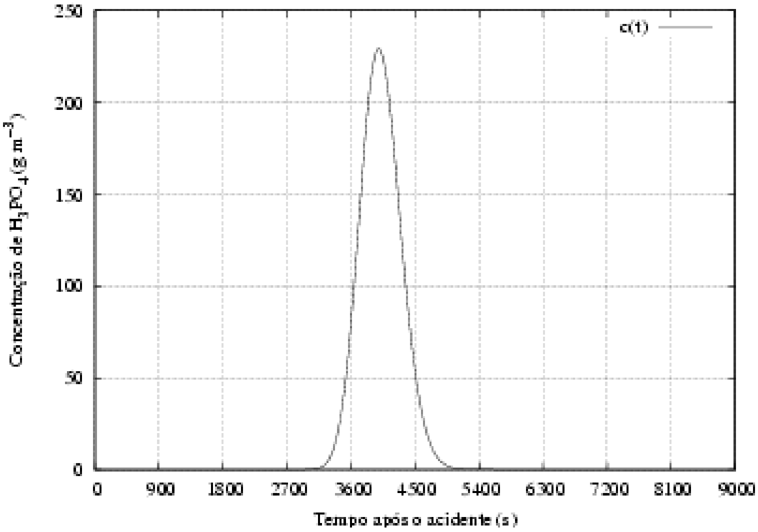
$D = C(0)\mathcal{T} = 1 \times 10 = 10\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [6,0] 4 km a jusante do acidente, existe um ponto turístico onde mais de 500 pessoas estão se banhando. A solução do problema lagrangeano é

$$c(x,t) = \frac{M}{\sqrt{2\pi}\sigma_X A} \exp\left(-\frac{(x-\overline{u}t)^2}{2\sigma_X^2}\right),$$

onde c é a concentração em $\mathrm{kg\,m^{-3}}$, M é a massa lançada instantaneamente e A é a área da seção transversal do rio, e está plotada para $x = 4000\,\mathrm{m}$ na figura abaixo, onde os valores calculados de $c(x,t)$ estão **intencionalmente exibidos**:



a) [4,0] Calcule a concentração máxima alcançada pelo H_3PO_4 no ponto turístico.
Da 1ª questão,

$$\sigma_X^2 = 2\sigma_u^2 \mathcal{T} t.$$

É fácil verificar que o tempo de máxima concentração corresponde a $t = x/\overline{u}$, donde

$$c_{\max} = \frac{M}{\sqrt{4\pi\mathcal{T}t}\sigma_u x A/\overline{u}} = 229{,}20\,\mathrm{g\,m^{-3}}.$$

b) [2,0] Quanto tempo a partir do acidente os turistas têm para saírem da água antes que sua saúde corra grave perigo? (**Justifique com cálculos**)
A resposta deve ser feita por tentativa e erro. Pelo gráfico, a qualquer tempo após 1800 s as concentrações já estão perigosamente próximas de $1\,\mathrm{g\,m^{-3}}$. Portanto, tem-se cerca de 30 minutos (meia hora) para retirar as pessoas da água.

Continue a solução no verso ⟹

TT010 Matemática Aplicada II
Prova Final, 20 Fev 2004
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

---

1 [2,0] Dada a densidade de probabilidade

$$f_X(x) = 1, \quad 0 \le x \le 1,$$

Calcule:

a) [1,0] $\mathrm{E}\{X\}$,

b) [1,0] $\mathrm{Var}\{X\}$.

SOLUÇÃO DA 1ª Questão:

$$\mathrm{E}\{X\} = \int_0^1 x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \blacksquare$$

$$\mathrm{Var}\{X\} = \int_0^1 (x - \mathrm{E}\{X\})^2 f_X(x)\,dx = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2\,dx = \frac{1}{12} \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [3,0] Duas variáveis aleatórias X e Y são independentes quando os eventos

$$A = \{\omega \mid X(\omega) \leq x\} \;\text{ e }\; B = \{\omega \mid Y(\omega) \leq y\}$$

são independentes. Neste caso:

a) [2,0] Mostre que a função distribuição acumulada (FDA) conjunta é $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$, onde $F_X(x)$ e $F_Y(y)$ são as FDA's de X e Y.

b) [1,0] Mostre que a função densidade de probabilidade (FDP) conjunta é $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, onde $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ são as FDP's de X e Y.

SOLUÇÃO DA 2ª Questão:

---

a) Se A e B são independentes,

$$P\{A \cap B\} = P\{A\}P\{B\},$$

isto é:

$$F_{X,Y}(x,y) = P\{X \leq x \text{ e } Y \leq y\} = P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\} = F_X(x)F_Y(y) \;\blacksquare$$

b) A densidade conjunta é

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= \frac{\partial^2 F_{X,Y}}{\partial x \partial y} \\ &= \frac{\partial^2 F_X(x)F_Y(y)}{\partial x \partial y} \\ &= \frac{\partial F_X(x)}{\partial x}\frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} \\ &= f_X(x)f_Y(y) \;\blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [2,0] Considere a equação da onda bi-dimensional

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)$$

com condições inicial e de contorno

$$\begin{aligned} \phi(x, y, 0) &= \Phi_0(x, y), \\ \phi(0, y, t) &= \phi(a, y, t) = 0, \\ \phi(x, 0, t) &= \phi(x, b, t) = 0. \end{aligned}$$

Use a substituição de variáveis

$$\phi(x, y, t) = \psi(x, y) e^{-i\omega t}$$

para obter a equação de Helmholtz:

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0, \quad k = \omega/c.$$

Esboce os principais passos da solução desta última equação (**não é preciso resolvê-la**).

SOLUÇÃO DA 3ª Questão:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= c^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \\ (-i\omega)^2 \psi(x, y) e^{-i\omega t} &= c^2 e^{-i\omega t} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\ -\omega^2 \psi(x, y) &= c^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\ \nabla^2 \psi + k^2 \psi &= 0 \; \blacksquare \end{aligned}$$

Esta equação pode ser resolvida por *separação de variáveis*:

$$\psi(x, y) = X(x) Y(y)$$

leva a

$$\begin{aligned} X'' Y + Y'' X + k^2 XY &= 0 \\ \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} &= -k^2 \end{aligned}$$

Esta última equação obviamente será resolvida se

$$\begin{aligned} X'' + \alpha^2 X &= 0, \\ Y'' + \beta^2 Y &= 0, \end{aligned}$$

com

$$\alpha^2 + \beta^2 = k^2.$$

A partir daí, o problema se reduz à solução das equações diferenciais ordinárias e a escolha das constantes de integração que atendam às condições de contorno.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [3,0] Resolva

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = f(t),$$

com

$$x(0) = a,$$
$$\frac{dx(0)}{dt} = b,$$

pelo método das funções de Green. Obtenha

$$x(t) = a\cos\omega t + \frac{b}{\omega}\operatorname{sen}\omega t + \int_0^t \frac{\operatorname{sen}\omega(t-\tau)}{\omega} f(\tau)\,d\tau.$$

Mostre claramente todos os passos até o resultado acima.

SOLUÇÃO DA 4ª Questão:

Considere, inicialmente, a expressão

$$\delta(x)f(x).$$

Como $\delta(x) = 0,\ x \neq 0$, ela é "igual a zero" em todos os $x \neq 0$. Já em $x = 0$, ela vai depender do comportamento de f ao se aproximar de zero. Portanto,

$$\delta(x)f(x) = \delta(x)f(0).$$

Esta observação será muito útil para encaminhar a solução. Vamos agora resolver o problema pelo método das funções de Green. Comece com

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = f(t),$$

e multiplique por $G(t,\tau)$:

$$G(t,\tau)\frac{d^2x}{d\tau^2} + \omega^2 G(t,\tau)x(\tau) = G(t,\tau)f(\tau);$$

como se trata de um problema de valor inicial, integre de 0 a ∞:

$$\int_0^\infty G(t,\tau)\frac{d^2x}{d\tau^2}\,d\tau + \omega^2\int_0^\infty G(t,\tau)x(\tau)\,d\tau = \int_0^\infty G(t,\tau)f(\tau)\,d\tau.$$

A primeira integral, e somente ela, precisa ser integrada por partes duas vezes:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty G(t,\tau)\frac{d^2x}{d\tau^2}\,d\tau &= G(t,\tau)\frac{dx}{d\tau}\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{dG(t,\tau)}{d\tau}\frac{dx}{d\tau}\,d\tau\\ &= G(t,\tau)\frac{dx}{d\tau}\bigg|_0^\infty - \frac{dG(t,\tau)}{d\tau}x(\tau)\bigg|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{d^2G(t,\tau)}{d\tau^2}x(\tau)\,d\tau,\end{aligned}$$

que pode ser simplificada se impusermos $G(t,\infty) = 0$, $dG(t,\infty)/d\tau = 0$:

$$= -G(t,0)b + \frac{dG(t,0)}{d\tau}a + \int_0^\infty \frac{d^2G(t,\tau)}{d\tau^2}x(\tau)\,d\tau.$$

Substituindo este resultado na integral do problema,

$$\begin{aligned}-G(t,0)b + \frac{dG(t,0)}{d\tau}a + \int_0^\infty \frac{d^2G(t,\tau)}{d\tau^2}x(\tau)\,d\tau + \omega^2\int_0^\infty G(t,\tau)x(\tau)\,d\tau &= \int_0^\infty G(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,\\ -G(t,0)b + \frac{dG(t,0)}{d\tau}a + \int_0^\infty \left[\frac{d^2G(t,\tau)}{d\tau^2} + \omega^2 G(t,\tau)\right]x(\tau)\,d\tau &= \int_0^\infty G(t,\tau)f(\tau)\,d\tau.\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

O truque padrão do método das funções de Green é fazer o termo entre colchetes igual à delta de Dirac:

$$\frac{d^2G(t,\tau)}{d\tau^2} + \omega^2 G(t,\tau) = \delta(\tau - t),$$

de forma que a integral correspondente fica

$$\int_0^\infty \delta(\tau - t)x(\tau)\,d\tau = x(t)$$

ou, finalmente,

$$x(t) = -\frac{dG(t,0)}{d\tau}a + G(t,0)b + \int_0^\infty G(t,\tau)f(\tau)\,d\tau.$$

Para que o método seja minimamente útil ou pelo menos atraente para seus usuários, é preciso que o problema de achar G seja pelo menos um pouco mais fácil que o problema de achar x. Note que a solução do problema homogêneo é do tipo $A\cos\omega\tau + B\,\mathrm{sen}\,\omega\tau$. A idéia é procurar uma solução por uma variação do método de variação de parâmetros. A solução deve conter a função de Heaviside H, para que a δ surja em suas derivadasd. Além disso, para que G e sua derivada se anulem no infinito, é conveniente escrever G em função de $H(t-\tau)$, pois $H(t-\infty) = 0$. Reunindo todas estas idéias, e inspirados pelo enunciado que já dá a solução, tentamos uma solução do tipo

$$G(t,\tau) = H(t-\tau)g(t-\tau) = H(t-\tau)B\,\mathrm{sen}\,\omega(t-\tau)$$

para o problema

$$\frac{d^2G}{d\tau^2} + \omega^2 G(t,\tau) = \delta(t-\tau).$$

Note que mudamos o sinal do argumento de δ. Isto não importa, porque ela pode ser interpretada como uma função "par", e ajuda na álgebra subseqüente. Derivando (em relação a τ) uma vez,

$$G'(t,\tau) = -\left[H(t-\tau)g'(t-\tau) + \underbrace{\delta(t-\tau)g(t-\tau)}_{\equiv 0}\right]$$

(pois $g(0) = 0$). Derivando mais uma vez,

$$G''(t,\tau) = H(t-\tau)g''(t-\tau) + \delta(t-\tau)g'(t-\tau).$$

Substituindo na equação diferencial, obtemos, finalmente,

$$H(t-\tau)\left[g''(t-\tau) + \omega^2 g(t-\tau)\right] + \delta(t-\tau)g'(t-\tau) = \delta(t-\tau).$$

O termo entre colchetes é identicamente nulo, independentemente do valor da constante B. Substituindo $g'(t-\tau) = B\omega\cos\omega(t-\tau)$ e usando o valor de $g'(0) = B\omega$

$$\delta(t-\tau)g'(0) = \delta(t-\tau) \;\Rightarrow\; B\omega = 1,$$

donde

$$G(t,\tau) = \frac{\mathrm{sen}\,\omega(t-\tau)}{\omega}$$

e

$$x(t) = a\cos\omega t + \frac{b}{\omega}\,\mathrm{sen}\,\omega t + \int_0^t \frac{\mathrm{sen}\,\omega(t-\tau)}{\omega}f(\tau)\,d\tau \;\blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹